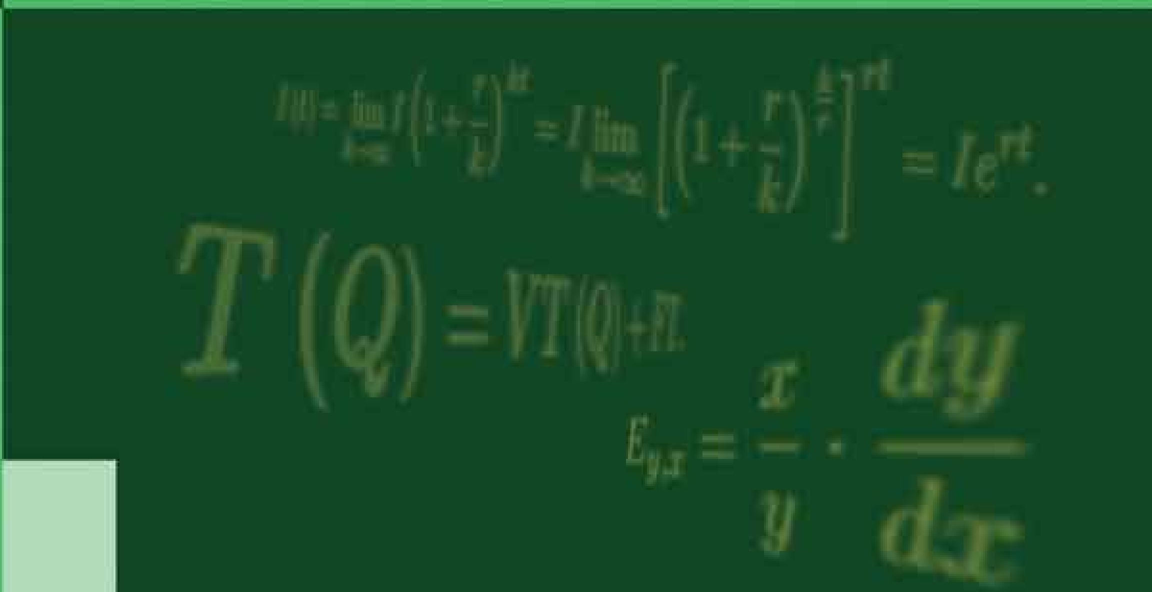
Mehmed Nurkanović Omer Kurtanović

# MATEMATIKA ZA EKONOMISTE



PRVO IZDANJE

Dr. sc. Mehmed Nurkanović

Dr. sc. Omer Kurtanović

# MATEMATIKA ZA EKONOMISTE

*Prvo izdanje*

**Tuzla, 2013.**

**Prof. dr. sc. Mehmed Nurkanović**
**Doc. dr. sc. Omer Kurtanović**

# MATEMATIKA ZA EKONOMISTE

*Recenzenti:*
**Dr. sc. Husein Pašagić**, profesor emeritus
Ekonomski fakultet Univerziteta u Bihaću
**Dr. sc. Tihomir Hunjak**, redoviti profesor
Sveučilište u Zagrebu, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin

*Izdavač:*
"PrintCom", d.o.o., grafički inženjering, Tuzla

*Za izdavača:*
Jasmin Hadžimehmedović

*Korektura, kompjuterska obrada teksta i naslovna strana:*
Autori

*Crteži:*
Prof. dr. sc. Mehmed Nurkanović
Prof. dr. sc. Zehra Nurkanović

*Štampa:*
"PrintCom", d.o.o., grafički inženjering, Tuzla

*Tiraž:*
300 primjeraka

---

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

51(075.8)
51-7:33(075.8)

NURKANOVIĆ, Mehmed
Matematika za ekonomiste / Mehmed Nurkanović, Omer Kurtanović. - 1. izd. - Tuzla : PrintCom, 2013. - 339 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Bibliografija: str. 335-[336].

ISBN 978-9958-13-079-3
1. Kurtanović, Omer
COBISS.BH-ID 2063821

---

Objavljivanje i upotrebu ovog udžbenika odobrio je
Senat Univerziteta u Bihaću
Odlukom broj 06-3416/2013 od 04.07.2013. godine.

*Zehri i Senadi*

# Predgovor

Savremeni pristup obradi određenih matematičkih sadržaja u primijenjenim naučnim disciplinama, posebno u slučaju ekonomije, zahtijeva veliki stepen simbioze teorijske komponente i komponente primjene u praksi. Nakon što se u jednoj cjelini uvedu osnovni matematički pojmovi, glavne tvrdnje i metodi, neophodno je pristupiti njihovoj adekvatnoj primjeni u ekonomskoj praksi. Na taj način bi čitaoci osjetili razloge izučavanja uvedenih teorijskih osnova i samim tim bi prestala potreba za pitanjima tipa: "Čemu ovo služi, odnosno zbog čega učimo ove stvari iz matematike?". Novi programski sadržaji predmeta Matematika za ekonomiste kako na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Bihaću tako i na ostalim javnim univerzitetima u Bosni i Hercegovini, posebno u Tuzli, Mostaru i Sarajevu, upravo su i koncipirani na ovaj način - da se nakon teorijskih osnova uvode primjeri primjene u ekonomskoj praksi. Ova knjiga je pokušaj, nadamo se i uspješan, da se to i ostvari i tako studentima znatno olakša prihvatanje novog gradiva, te da se izbjegne suhoparnost matematičkih udžbenika koji su oskudijevali primjerima iz prakse.

Nastojali smo da izbjegnemo isuviše precizan pristup u obradi matematičkih sadržaja, ali da ipak sve bude korektno napisano, posebno ponekad izbjegavajući precizne definicije koristeći opisni način njihovog uvođenja. Većinu tvrdnji smo naveli bez dokaza (osim njih nekolicine), nastojeći da izbjegnemo bespotrebno opterećivanje studenata matematičkom teorijom, ali smo zato skoro u svakoj sekciji naveli po jedan ili više odgovarajućih primjera primjene obrađenih matematičkih sadražaja u ekonomskoj praksi. Skoro na kraju svake sekcije navedeni su zadaci za samostalan rad kako bi studenti mogli adekvatno da savladaju pređeno gradivo i da se što bolje pripreme za ispit.

Knjiga Matematika za ekonomiste ima sedam poglavlja. U prvom poglavlju obrađeni su osnovni elementi matričnog računa i sistemi linearnih algebarskih jadnedžbi, a kao oblici primjene u ekonomiji navedeni su: model tržišne ravnoteže, model nacionalnog dohotka i input-output (međusektorska) analiza. U drugom poglavlju razmatraju se realne funkcije jedne realne varijable, posebno sve elementarne funkcije i njihove osobine, kao i primjena funkcija u ekonomiji: funkcija potražnje, funkcija ponude, funkcija troškova, te funkcije prihoda i dobiti (i njihove glavne karakteristike), a na kraju su razmatrani nizovi, općenito, a onda i posebno: aritmetički i geometrijski niz, te pojam granične vrijednosti niza. Predmetom izučavanja u trećem poglavlju je diferencijalni račun funkcija jedne varijable i primjena u ekonomiji (posebno granične funkcije, optimizacija i elastičnost). U okviru četvrtog poglavlja razmatran je diferencijalni račun funkcija dvije i više varijabli i njegova primjena u ekonomiji. Integralni račun (neodređeni i određeni integral) razmatrani su detaljno u petom poglavlju i, naravno, primjena integralnog računa u ekonomiji. U posljednja dva poglavlja razmatrani su metematički modeli u ekonomiji: kontinuirani, u obliku diferencijalnih jednadžbi, i diskretni, u obliku diferentnih jednadžbi. Ovi posljednji su bitna novina na našim prostorima u literaturi ovakve namjene, a sadrže niz zanimljivih primjera iz ekonomske prakse kao što su: izračunavanje kamate na štedne uloge, izrada amortizacionog plana otplate zajma, model paukova mreža, model pregovora menadžnenta i radnika i slično.

Nadamo se da će, ovako koncipirana, knjiga Matematika za ekonomiste biti od koristi studentima pri savladavanju istoimenog predmeta kao i nekih drugih predmeta s kojima će imati priliku da se susretnu u toku studija.

Recenzentima, emeritusu prof. dr. Huseinu Pašagiću i prof. dr. Tihomiru Hunjaku, najiskrenije se zahvaljujemo na uloženom trudu i korisnim sugestijama koje su doprinijele kvalitetnijem izgledu ove knjige.

Duboko smo svjesni, naravno, činjenice da postoje i neki propusti u pisanju ove knjige, te se unaprijed zahvaljujemo svim pažljivim čitaocima na argumentiranim primjedbama koje mogu poslati na mail adrese: *mehmed.nurkanovic@untz.ba* i *omer.kurtanovic@hotmail.com.*

Tuzla - Bihać, juni 2013. godine *Autori*

# Sadržaj

# Poglavlje 1

# Matrični račun i sistemi linearnih algebarskih jednadžbi

## 1.1 Matrice i determinante

### 1.1.1 Pojam matrice

Promatrajmo mjesečne prikaze prodaje različitih tipova automobila na različitim prodajnim mjestima za mjesece oktobar i novembar:

| | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| P1 | 20 | 15 | 9 | 10 |
| P2 | 15 | 10 | 6 | 5 |
| P3 | 5 | 3 | 2 | 4 |

**Tabela 1.1** - Oktobar

| | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| P1 | 15 | 12 | 7 | 8 |
| P2 | 16 | 8 | 3 | 2 |
| P3 | 6 | 2 | 1 | 2 |

**Tabela 1.2** - Novembar

Uočavamo da su tabele veoma pregledne i da iz njih precizno možemo ustanoviti koliko je kojeg tipa automobila (A1, A2, A3, A4) prodano na pojedinim prodajnim mjestima (P1, P2, P3). Vidimo da su nam u vertikalnim kolonama raspoređene količine prodatih automobila pojedinog tipa, a da su u horizontalnim redovima poredane količine prodatih automobila po prodajnim mjestima. Tako možemo pročitati da su nam u prvoj koloni (za oktobar i novembar, redom) sljedeći podaci

$$\begin{array}{ccc} 20 & & 15 \\ 15 & \text{i} & 16 \\ 5 & & 6 \end{array}$$

a da su, recimo u drugom horizontalnom redu (za oktobar i novembar, redom) sljedeći podaci

$$\begin{matrix} 15 & 10 & 6 & 5 \\ & \text{i} & & \\ 16 & 8 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Naravno, u praksi se susrećemo sa znatno većim tabelama, tj. s većim brojem vertikalnih kolona i horizontalnih redova i to za svaki od 12 mjeseci u godini. Rad s tako velikim brojem podataka je danas znatno olakšan upotrebom računara. No, operateru koji radi s ovakvim tabelama često nisu potrebni prvi red horizontalno (s podacima o tipovima automobila) i prva kolona vertikalno (s podacima o prodajnim mjestima) u tabeli, jer ih obično znaju "napamet". Dakle, oni bi se sigurno dobro snašli i s podacima iz ovih tabela ako bismo izbrisali horizontalne i vertikalne linije, kao i objašnjenja o tipovima automobila i prodajnim mjestima. Drugim riječima, čak i ovakav raspored podataka za oktobar i novembar

$$\begin{matrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{\textbf{Tabela 1.1A}} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 15 & 12 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\textbf{Tabela 1.2A}} \end{matrix} \tag{1.1}$$

bi njima bio razumljiv i praktičan za manipulaciju. Pogotovo takav raspored podataka je praktičan za unos u računar i manipulaciju tim podacima. Jedino, kako ne bi pri bliskom zapisivanju susjednih tabela došlo do miješanja njihovih podataka, podatke iz (1.1) ćemo, za svaku tabelu posebno, po konvenciji, staviti ili u malu ili u srednju zagradu i dobiti unutar njih pravougaone sheme brojeva. Ovo znači da Tabeli 1.1 možemo jednoznačno pridružiti sljedeću pravougaonu shemu brojeva

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

a Tabeli 1.2 sljedeću pravougaonu shemu

$$\begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ovakve pravougaone sheme brojeva zvat ćemo *matricama.* Matrice označavamo velikim slovima abecede kao, na primjer, u našem slučaju:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 9 & 10 \\ 15 & 10 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 8 \\ 16 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

U svakoj od navedenih matrica tačno znamo koji se elementi nalaze kako u pojedinim *kolonama* tako i u pojedinim horizontalnim redovima (koje ćemo ubuduće zvati *vrstama*). Svaki pojedini podatak u matrici nazivamo *elementom* matrice. Jasno je da je položaj svakog elementa date matrice potpuno određen rednim brojem kolone i rednim brojem vrste u kojima se on nalazi. Tako se, broj 3 u matrici $A$ nalazi u 3. vrsti i 2. koloni, a u matrici $B$ isti broj se nalazi u 2. vrsti i 3. koloni. Zbog toga broj 3 iz matrice $A$ možemo općenito označiti sa $a_{32} = 3$, dok ga kao element matrice $B$ možemo zapisati kao $b_{23} = 3$. Dakle, prvi broj u indeksu označava redni broj vrste, a drugi broj u indeksu označava redni broj kolone u kojima se element nalazi. Općenito, matrica može imati, kao i odgovarajuća joj tabela, proizvoljan broj vrsta i proizvoljan broj kolona, recimo $m$ vrsta i $n$ kolona. Za takvu matricu kažemo da je formata $m \times n$. U našem primjeru matrice $A$ i $B$ su obje formata $3 \times 4$.

Sada možemo dati sljedeću definiciju matrice.

**Definicija 1.1** *Matrica $A$ formata $m \times n$ je pravougaona shema elemenata $a_{ij}$ koji su poredani u $m$ vrsta i $n$ kolona.*

Elementi $a_{ij}$ su obično realni ili kompleksni brojevi u općem slučaju, no kod nas će oni biti realni brojevi budući da nas zanima primjena u ekonomiji i da se oslanjamo na odgovarajuće tabele pri formiranju matrice. Općenito, oznaka $a_{ij}$ znači da se element matrice $A$ nalazi u $i$-toj vrsti i $j$-toj koloni. Matricu $A$ formata $m \times n$ eksplicitno ćemo pisati u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

ili kraće kao

$$A = [a_{ij}]\,, \quad (i \in \{1, 2, ..., m\}\,, j \in \{1, 2, ..., n\})\,. \tag{1.3}$$

Tako imamo, na primjer, da je:

- matrica $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ formata $2 \times 3$;
- matrica $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ formata $1 \times 4$;
- matrica $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ formata $3 \times 1$.

Matrici formata $1 \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

dat ćemo i naziv *matrica vrsta* ili *vektor vrsta*, dok ćemo matrici formata $m \times 1$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

dati i naziv *matrica kolona* ili *vektor kolona.*

U specijalnom slučaju, kada je $m = n$, matrica ima jednak broj vrsta i kolona, pa se ona tada naziva *kvadratnom matricom.* Kvadratne matrice igraju vrlo značajnu ulogu u matričnom računu i njegovoj primjeni u rješavanju sistema linearnih algebarskih jednadžbi. Zato ćemo istaknuti neke važne činjenice vezane za kvadratne matrice.

Za kvadratnu matricu formata $n \times n$ kraće ćemo reći da je kvadratna matrica reda $n$, uz obavezno naglašavanje riječi "kvadratna". Koristit ćemo, u skladu s (1.2), općeniti zapis kvadratne matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

U kvadratnoj matrici (1.4) elementi $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ čine *glavnu dijagonalu* matrice $A$, a njihov zbir

$$TrA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

nazivamo *tragom* kvadratne matrice $A$.

Navedimo sada neke specijalne kvadratne matrice. Matricu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

tj. kvadratnu matricu čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli nazivamo *gornjom trougaonom matricom.* Analogno se definira i *donja trougaona matrica* kao kvadratna matrica čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli.

Ukoliko su svi elementi kvadratne matrice jednaki nuli, osim onih na dijagonali, tj. $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j$, odnosno ako je

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

tada matricu nazivamo *dijagonalnom matricom*. Specijalno, ako je u dijagonalnoj matrici $d_i = d \neq 0$ za sve $i \in \{1, 2, ..., n\}$, onda matricu nazivamo *skalarnom matricom,* a ako je u skalarnoj matrici $d = 1$, tj.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

matricu nazivamo *jediničnom matricom* i označavat ćemo je sa $I$ ili sa $I_n$ ako želimo naglasiti kojeg je reda (formata).
Osim toga, matricu bilo kojeg formata čiji su svi elementi jednaki 0 nazivamo *nula matricom* i označavamo sa $\boldsymbol{O}_{m\times n}$. Tako je nula matrica formata $3 \times 2$ oblika

$$\boldsymbol{O}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kod matrica je važno definirati relaciju jednakosti.

**Definicija 1.2** *Za matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ kažemo da su jednake ako su one istog formata i ako su im odgovarajući elementi međusobno jednaki (tj. ako je $a_{ij} = b_{ij}$, za sve $i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}$).*

**Primjer 1.1** *Odrediti parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da matrice $A$ i $B$ budu jednake ako je*

$$A = \begin{bmatrix} a-b & 3a \\ a+b & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2a+b & 2b \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Rješenje.* Prema definiciji jednakosti dviju matrica slijedi, pošto su one istog formata, da mora biti

$$\begin{aligned} a-b &= -2a+b, \\ 3a &= 2b, \\ a+b &= 5. \end{aligned}$$

**4.** Dat je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i u slučaju saglasnosti riješiti ga proizvoljnim metodom.

**5.** Dat je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 + 10x_3 - 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Ispitati saglasnost datog sistema i u slučaju saglasnosti riješiti ga proizvoljnim metodom.

**6.** U ovisnosti o realnom parametru $a$ diskutirati rješenje sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

**7.** Odrediti realni parametar $m$ tako da sistem

$$\begin{aligned} x - 2y + mz &= 0 \\ x + y - 2mz &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

ima netrivijalnih rješenja.

## 1.3 Primjene u ekonomiji

Razmotrit ćemo primjenu matričnog računa u rješavanju sistema linearnih algebarskih jednadžbi u nekim jednostavnijim modelima u ekonomiji: linearni model tržišne ravnoteže, model nacionalnog dohotka i međusektorski model (input-output analiza).

### 1.3.1 Model tržišne ravnoteže

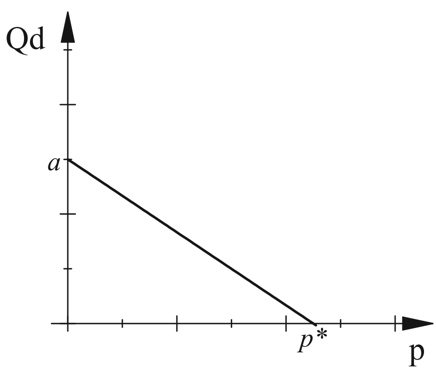
Nejjednostavniji model tržišne ravnoteže je linearni model. Mi ćemo prvo razmotriti model tržišne ravnoteže u slučaju jedne robe, a zatim i više roba. To podrazumijeva ispitivanje određivanja cijene robe na odvojenom tržištu.
Dakle, u slučaju razmatranja jedne robe razmotrimo sljedeće varijable: količina potražnje robe ($Q_d$), količina ponude robe ($Q_s$) i cijenu te robe ($p$). Naravno, na samom početku postavlja se pitanje nametanja uvjeta ravnoteže. Ovdje ćemo taj uvjet označiti kao: *višak potražnje je jednak nuli, tj.*

$$Q_d - Q_s = 0. \tag{1.38}$$

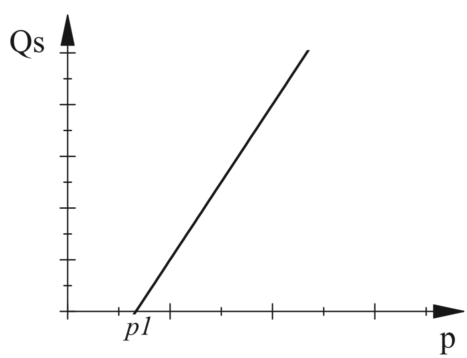
Pretpostavit ćemo da su $Q_d$ i $Q_s$ linearne funkcije cijene $p$, što je najjednostavniji slučaj i upravo to i daje naziv modelu - linearni. Logično je zahtijevati da je potražnja opadajuća funkcija cijene, tj. s porastom cijene $p$ opada interes (kupaca) za potražnjom te robe na tržištu, tako da na određenom nivou cijene $p^*$ ta potražnja postaje 0. Također, smatrat ćemo da je potražnja maksimalna i iznosi neku vrijednost $a$ ($a > 0$) u slučaju kad je cijena $p = 0$. Linearna funkcija potražnje $Q_d$ u ovom slučaju ima oblik

$$Q_d(p) = a - bp, \quad (a > 0, b > 0),$$

tj. funkcija potražnje ima negativan nagib $-b$ (koeficijent koji stoji uz neovisnu varijablu $p$) i presjek s vertikalnom osom u $a$, v. Sliku TR1.




**Slika TR1:** Funkcija potražnje (linearna)

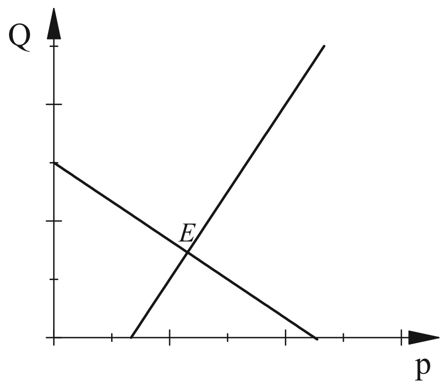



**Slika TR2:** Funkcija ponude (linearna)

S druge strane, zahtijevat ćemo da je ponuda rastuća funkcija cijene $p$, tj. da s porastom cijene raste i ineteres za ponudom robe na tržištu od strane ponuđača robe (proizvođača, odnsono prodavca). Jasno je da se ponuđaču isplati nuditi robu na tržištu tek kad ona dostigne određeni nivo $p_1$. Zbog toga će linearna funkcija ponude u ovom slučaju biti oblika

$$Q_s(p) = -c + dp, \quad (c > 0, d > 0),$$

tj. funkcija ponude ima pozitivan nagib $d$ i presjek s horizontalnom osom u $p_1 = \frac{c}{d}$, v. Sliku TR2.




**Slika TR3:** Ekvilkibrijum

Uočimo da je kod obje funkcije neovisna varijabla cijena $p$ i ona je predstavljena na horizontalnoj osi, dok je funkcija količine (ponude ili potražnje) predstavljena na vertikalnoj osi. Ta će praksa ubuduće biti vrlo česta.
Prema tome, matematička interpretacija linearnog modela tržišne ravnoteže je:

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_s, \\ Q_d(p) &= a - bp, \\ Q_s(p) &= -c + dp. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Odavde se može dobiti samo jedna jednadžba (s jednom nepoznanicom $p$):

$$a - bp = -c + dp,$$

odnosno

$$(b + d)\,p = a + c.$$

Kako je $b + d \neq 0$, jasno je da je tržišna ravnotežna cijena

$$\overline{p} = \frac{a + c}{b + d}. \tag{1.40}$$

Primijetimo da je $\overline{p} > 0$, što je i logično.
S druge strane, ravnotežnu količinu $\overline{Q}$ dobijamo ako ravnotežnu cijenu uvrstimo u drugu ili treću jednadžbu našeg modela (1.39). Tako je

$$\overline{Q} = -c + d\frac{a+c}{b+d} = \frac{-c\,(b+d) + d\,(a+c)}{b+d} = \frac{ad-bc}{b+d}.$$

Naravno, zahtijevamo da je $\overline{Q} > 0$, da bi ovaj model imao ekonomskog smisla. To znači da treba da je $ad > bc$. Na taj smo način, uz taj uvjet, dobili jedinstvenu tačku tržišne ravnoteže ili tržišni ekvilibrijum: $E = \left(\overline{p}, \overline{Q}\right) = \left(\frac{a+c}{b+d}, \frac{ad-bc}{b+d}\right)$, koja se nalazi u prvom kvadrantu koordinatnog sistema (Slika TR3).

Nešto složeniji slučaj tržišne ravnoteže imamo sa dvije ili više roba. Kako nam ovdje nije cilj razmatranja formiranja matematičkog modela, nego samo njegovo rješavanje kad nam je poznat, tako razmotrimo sljedeći linearni model:

$$\begin{aligned} Q_{d1} &= Q_{s1}, \\ Q_{d1} &= \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \\ Q_{s1} &= \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2, \\ Q_{d2} &= Q_{s2}, \\ Q_{d2} &= \gamma_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2, \\ Q_{s2} &= \delta_0 + \delta_1 p_1 + \delta_2 p_2. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Ovo je sistem linearnih algebarskih jednadžbi s četiri nepoznanice: $p_1, p_2, Q_1, Q_2$ i njegovim rješavanjem dobiju se ravnotežne cijene $\overline{p}_1$ i $\overline{p}_2$, te ravnotežne količine ponude, odnosno potražnje, $\overline{Q}_1$ i $\overline{Q}_2$. Sistem (1.41) se jednostavno svodi na sistem od dvije nepoznanice ($p_1$ i $p_2$)

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 &= \beta_0 + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2, \\ \gamma_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 &= \delta_0 + \delta_1 p_1 + \delta_2 p_2, \end{aligned}$$

koji se može predstaviti u uobičajenoj formi

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \beta_1)\,p_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\,p_2 = \beta_0 - \alpha_0, \\ (\gamma_1 - \delta_1)\,p_1 + (\gamma_2 - \delta_2)\,p_2 = \gamma_0 - \delta_0. \end{cases} \tag{1.42}$$

Riješimo ga matričnim metodom. Naime, sistem (1.42) može se napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \\ \gamma_0 - \delta_0 \end{bmatrix}.$$

Ako pretpostavimo da je

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix} = (\alpha_1 - \beta_1)(\gamma_2 - \delta_2) - (\alpha_2 - \beta_2)(\gamma_1 - \delta_1) \neq 0,$$

matrica

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix}$$

će biti invertibilna, pa sistem (1.42) ima jedinstveno rješenje

$$\begin{bmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ \gamma_1 - \delta_1 & \gamma_2 - \delta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_0 - \alpha_0 \\ \gamma_0 - \delta_0 \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

Adjungirana matrica matrice $A$ je

$$adj A = \begin{bmatrix} \gamma_2 - \delta_2 & -(\gamma_1 - \delta_1) \\ -(\alpha_2 - \beta_2) & \alpha_1 - \beta_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \gamma_2 - \delta_2 & -(\alpha_2 - \beta_2) \\ -(\gamma_1 - \delta_1) & \alpha_1 - \beta_1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} adj A \\ &= \frac{1}{(\alpha_1 - \beta_1)(\gamma_2 - \delta_2) - (\alpha_2 - \beta_2)(\gamma_1 - \delta_1)} \begin{bmatrix} \gamma_2 - \delta_2 & -(\alpha_2 - \beta_2) \\ -(\gamma_1 - \delta_1) & \alpha_1 - \beta_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uvedimo skraćene oznake (zbog jednostavnijeg zapisa):

$$a_1 = \alpha_1 - \beta_1, a_2 = \alpha_2 - \beta_2, c_1 = \gamma_1 - \delta_1, c_2 = \gamma_2 - \delta_2, b_1 = \beta_0 - \alpha_0, b_2 = \gamma_0 - \delta_0.$$

Prema (1.43), imamo

$$\begin{bmatrix} \overline{p}_1 \\ \overline{p}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1 c_2 - a_2 c_1} \begin{bmatrix} c_2 & -a_2 \\ -c_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1 c_2 - a_2 c_1} \begin{bmatrix} c_2 b_1 - a_2 b_2 \\ -c_1 b_1 + a_1 b_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\overline{p}_1 = \frac{c_2 b_1 - a_2 b_2}{a_1 c_2 - a_2 c_1}, \quad \overline{p}_2 = \frac{-c_1 b_1 + a_1 b_2}{a_1 c_2 - a_2 c_1}.$$

Naravno, pri tome, da bi dobijeni rezultati imali ekonomsku opravdanost, tj. da bi ravnotežne cijene bile pozitivne, neophodno je da oba brojnika imaju isti predznak kao nazivnik, tj.

$$\operatorname{sgn}(c_2 b_1 - a_2 b) = \operatorname{sgn}(-c_1 b_1 + a_1 b) = \operatorname{sgn}(a_1 c_2 - a_2 c_1) \neq 0,$$

gdje funkcija $\operatorname{sgn}(x)$ (čitamo signum od $x$) definirana ovako

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x > 0 \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ -1 & \text{za } x < 0 \end{cases}.$$

Neposrednim uvrštavanjem u drugu (ili treću) i petu (ili šestu) jednadžbu polaznog sistema (1.41), dobijaju se i tržišne ravnotežne količine $\overline{Q}_1$ i $\overline{Q}_2$.

### 1.3.2 Model nacionalnog dohotka

Postoji mnogo modela nacionalnog dohotka, a mi ćemo ovdje razmatrati sljedeći, koji je predstavljen sistemom linearnih algebarskih jednadžbi

$$\begin{aligned} Y &= C + I_0 + G, \\ C &= a + b\left(Y - T_0\right), \\ G &= gY. \end{aligned}$$

Pri tome je $Y$ varijabla nacionalnog dohotka, $C$ je varijabla ukupne potrošnje pojedinaca i domaćinstava, a $G$ ukupna vladina potrošnja, $I_0$ predstavlja nivo investiranja, $T_0$ označava nivo poreza ($I_0$ i $T_0$ su poznate veličine), dok su $a, b, g$ pozitivni parametri koji zadovoljavaju uvjete: $a > 0, 0 < b < 1, 0 < g < 1$. Rješavanjem datog sistema jednadžbi dobijamo ekvilibrijum nacionalnog dohotka kao trojku $\left(\overline{Y}, \overline{C}, \overline{G}\right)$. Upotrijebimo Cramerov metod, nakon što dati model napišemo u prikladnijem obliku:

$$\begin{aligned} Y - C - G &= I_0, \\ -bY + C \qquad &= a - bT_0, \\ -gY \qquad + G &= 0. \end{aligned}$$

Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -b & 1 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - b - g,$$

i ako pretpostavimo da je $1 - b - g \neq 0$, po Cramerovom teoremu sistem ima jedinstveno rješenje. Dalje je

$$D_1 = \begin{vmatrix} I_0 & -1 & -1 \\ a - bT_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = I_0 + a - bT_0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & I_0 & -1 \\ -b & a - bT_0 & 0 \\ -g & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - g)\left(a - bT_0\right) + bI_0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & I_0 \\ -b & 1 & a - bT_0 \\ -g & 0 & 0 \end{vmatrix} = g\left(a - bT_0 + I_0\right),$$

pa je

$$\overline{Y}=\frac{a-bT_0+I_0}{1-b-g},\ \overline{C}=\frac{(1-g)\,(a-bT_0)+bI_0}{1-b-g},\ \overline{G}=\frac{g\,(a-bT_0+I_0)}{1-b-g}.$$

Da bi rješenje imalo ekonomskog smisla sve komponente ekvilibrijuma nacionalnog dohotka moraju biti pozitivne. Logično je zahtijevati (tako se i radi u praksi, zašto?) da je $b+g<1$. Dodatno ograničenje na parametre je $a-bT_0+I_0>0$.

∘ ∘ ∘

**Zadaci za samostalan rad**

**1.** Neka je zadan model tržišta

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_s, \\ Q_d\,(p) &= 14-5p, \\ Q_s\,(p) &= -6+10p. \end{aligned}$$

Naći ekvilibrijum tržišta $\left(\overline{p},\overline{Q}\right)$.

**2.** Zadane su sljedeće funkcije potražnje i ponude za model tržišta dvaju roba:

$$\begin{array}{ll} Q_{d1}\,(p)=18-3p_1+p_2, & Q_{d2}\,(p)=12+2p_1-2p_2, \\ Q_{s1}\,(p)=-2+4p_1, & Q_{s2}\,(p)=-2+3p_2. \end{array}$$

Odrediti ravnotežno stanje tržišta.

**3.** Zadan je sljedeći model nacionalnog dohotka:

$$\begin{aligned} Y &= C+I_0+G_0, \\ C &= a+b\,(Y-T)\,, \quad (a>0, 0<b<1) \\ T &= d+tY, \quad (d>0, 0<t<1) \end{aligned}$$

pri čemu je $T$ varijabla poreza, a $t$ stopa poreza na dohodak (ostale varijable su iste kao u opisanom modelu nacionalnog dohotka). Odrediti ekvilibrijum (ravnotežno stanje) nacionalnog dohotka, koristeći: a) matrični metod, b) Cramerov metod, c) metod supstitucije.

**4.** Odrediti ekvilibrijum nacionalnog dohotka (sa dvije varijable):

$$\begin{aligned} Y &= C+I_0+G_0, \\ C &= 25+6Y^{\frac{1}{2}}, \\ I_0 &= 16, \\ G_0 &= 14. \end{aligned}$$

**5.** Dat je sljedeći model nacionalnog dohotka:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G_0, \\ C &= a + bY, \quad (a > 0, 0 < b < 1) \\ I &= iY, \qquad (0 < i < 1) \\ G_0 &= 100, \end{aligned}$$

pri čemu je $I$ varijabla investicija. Odrediti ekvilibrijum nacionalnog dohotka. Uz koje uvjete postoji rješenje?

### 1.3.3 Input-output analiza

Jedna vrlo praktična primjena sistema linearnih algebarskih jednadžbi i matričnog računa općenito jeste upravo u tzv. *međusektorskom modelu* ili *input-output analizi.* Ovdje ćemo se upravo i posvetiti pitanju te primjene, a ne detaljnom proučavanju input-output analize. Napomenimo da pod *inputom* podrazumijevamo ono što ulazi u neki proces, odnosno u razmatrane sektore u ekonomiji, a pod *outputom* podrazumijevamo ono što izlazi iz razmatranog procesa, odnosno proizvode razmatranih sektora.
Historijski gledano, potreba za ovom vrstom modeliranja (odnosno analize) pojavila se ubrzo nakon izbijanja II svjetskog rata kada je američki predsjednik F. D. Roosevelt izdao nalog za proizvodnju 50 000 aviona, što je zahtijevalo istovremeno i veliku proizvodnju aluminija u državi. Tako velika proizvodnja aluminija zahtijevala je masivne sabirnice kroz koje bakar provodi struju i nepredviđene nestašice bakra prijetile su cijelom rasporedu proizvodnje. Vlada je za prevazilaženje te krize zaključila da treba zamijeniti bakar srebrom. Ali odakle dobiti toliku količinu srebra? Pozajmili su ga iz Fort Knoxa i 50 000 aviona je bilo proizvedeno, a krajnji rezultat njihove upotrebe u ratu je mnogo značajniji. Ovo nam pokazuje da se nekada, a posebno u ratnim okolnostima, ekonomija jedne države može uspješno planirati vodeći računa o proizvodnji svakog outputa iz pojedinog sektora (kao što je proizvodnja aviona zahtijevala određene količine aluminija, proizvodnja aluminija zahtijevala proizvodnju bakra i struje itd.). Gotovo svaki od proizvoda bilo kojeg sektora se koristi za uspješnu reprodukciju u ostalim sektorima i eventualno u svom sektoru. Međutim, obično se osim ovih sektora u međusektorski model uključuje i jedan tzv. "otvoreni sektor" (npr. domaćinstva) koji egzogeno predstavlja *finalnu potražnju* za proizvodom svakog pojedinog sektora i koja nije utrošak ni za jedan sektor. U tom se slučaju model naziva *otvorenim.*

Pretpostavimo sada da u jednoj ekonomiji egzistira $n$ sektora. Uvedimo oznake:

$Q_i$ - ukupna količina outputa $i$-tog sektora ($i \in \{1, 2, ..., n\}$),

$Q_{ij}$ - količina outputa iz $i$-tog sektora neophodna za proces reprodukcije u $j$-tom sektoru ($i, j \in \{1, 2, ..., n\}$),

$q_i$ - finalna potražnja outputa $i$-tog sektora ($i \in \{1, 2, ..., n\}$).

Ključna pretpostavka je: *$Q_i$ potrošiti ili na međusektorsku potrošnju $Q_{ij}$ ili na finalnu potražnju $q_i$.* Pri tome ćemo zahtijevati da imamo tržišnu ravnotežu, tj. da je ponuda jednaka potražnji. To se može predstaviti sljedećim sistemom jednadžbi

$$\left.\begin{array}{c} Q_1 = Q_{11} + Q_{12} + ... + Q_{1n} + q_1 \\ Q_2 = Q_{21} + Q_{22} + ... + Q_{2n} + q_2 \\ \vdots \\ Q_n = Q_{n1} + Q_{n2} + ... + Q_{nn} + q_n \end{array}\right\}, \tag{1.44}$$

odnosno shematski sljedećom tzv. input-output (I-O) tabelom:

| $Q_i$ | $Q_{ij}$ | | | | $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q_1$ | $Q_{11}$ | $Q_{12}$ | ... | $Q_{1n}$ | $q_1$ |
| $Q_2$ | $Q_{21}$ | $Q_{22}$ | ... | $Q_{2n}$ | $q_2$ |
| $\vdots$ | | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $Q_n$ | $Q_{n1}$ | $Q_{n2}$ | ... | $Q_{nn}$ | $q_n$ |

Uočimo sljedeću važnu činjenicu: za proizvodnju svake jedinice proizvoda u $j$-tom sektoru potrebna je konstantna količina proizvoda iz $i-$tog sektora. Da bi to bilo osigurano treba da su tehnološki uvjeti proizvodnje nepromjenjivi, budući da je inače svaka proizvodnja vezana za neku tehnologiju. Na taj način neophodno je uvesti pojam *tehničkih koeficijenata (tehničkih normativa). Označavat ćemo ih sa $a_{ij}$* ($i, j \in \{1, 2, ..., n\}$) i, budući da oni predstavljaju količinu outputa iz $i$-tog sektora neophodnog za uspješnu proizvodnju 1 jedinice outputa u $j$-tom sektoru, vrijedit će formula

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j}, \quad (i, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.45}$$

Odavde neposredno slijedi da je

$$Q_{ij} = a_{ij} Q_j, \quad (i, j \in \{1, 2, ..., n\}). \tag{1.46}$$

Zbog toga se sistem jednadžbi (1.44) može napisati u obliku

$$\left.\begin{array}{c} Q_1 = a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + ... + a_{1n}Q_n + q_1 \\ Q_2 = a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + ... + a_{2n}Q_n + q_2 \\ \vdots \\ Q_n = a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + ... + a_{nn}Q_n + q_n \end{array}\right\}. \tag{1.47}$$

# Poglavlje 2

# Funkcije jedne realne varijable

## 2.1 Pojam i osobine funkcije

Pojam funkcije u njenom općenitom smislu najjednostavnije je shvatiti kroz primjere iz svakodnevnog života.

1. Pretpostavimo da se jedan kamion kreće po nekom određenom putu. Provjerom je ustanovljeno da je nakon jednog sata kretanja taj kamion prešao 25 km, nakon 2 sata kretanja 50 km, nakon 5 sati kretanja 125 km, a nakon 8 sati kretanja 200 km.

   Označimo vrijeme kretanja (izraženo u satima) sa $x$, a odgovarajuću dužinu pređenog puta sa $y$. Uočavamo dva skupa elemenata: skup $A$ sa četiri elementa (promatrane vrijednosti od $x$): $A = \{1, 2, 5, 8\}$ i skup $B$ također s četiri elementa (odgovarajuće vrijednosti $y$): $B = \{25, 50, 75, 200\}$. Ovdje uočavamo i sljedeću važnu činjenicu:

   *Svakom elementu skupa A odgovara (pridružen mu je) tačno jedan element skupa B, odnosno svakoj promatranoj vrijednosti x odgovara tačno jedna vrijednost y.*

2. U jednom proizvodnom pogonu ukupni troškovi pri proizvodnji dva komada određenog proizvoda iznose 25\$, pri proizvodnji 3 komada 35\$, pri proizvodnji 6 komada 65\$, pri proizvodnji 9 komada 95\$, pri proizvodnji 12 komada 125\$.

   I ovdje imamo dva skupa: skup $A = \{2, 3, 6, 9, 12\}$ s pet elemenata ($x$) koji označavaju broj proizvedenih komada određenog proizvoda i skup $B = \{25, 35, 65, 95, 125\}$ s pet elemenata ($y$) koji označavaju ukupne troškove pridružene odgovarajućim elementima skupa $A$.

Dakle, u oba slučaja imali smo situaciju da je svakom elementu skupa $A$ pridružen *tačno jedan* element skupa $B$. To pridruživanje (zakonitost, pravilo) označimo sa $f : A \to B$, a specijalno da je elementu $x$ iz skupa $A$ pridružen upravo element $y$ iz skupa $B$ pravilom $f$ pišemo

$$y = f(x).$$

U ovom slučaju zakonitost $f$ ćemo zvati *funkcijom* sa skupa $A$ u skup $B$. Prema tome, vrijedi općenito:

**Definicija 2.1** *Neka su $A$ i $B$ neprazni skupovi. Pravilo (zakon ili propis) $f$ po kome se svakom elementu skupa $A$ pridružuje tačno jedan element skupa $B$ naziva se* ***funkcijom*** *sa skupa $A$ u skup $B$ i označava sa $f : A \to B$.*

Posebno će nas zanimati funkcije sa skupa $A$ u skup $B$, kada je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $B \subseteq \mathbb{R}$. U tom slučaju funkciju nazivamo *realnom funkcijom realne varijable.* Elemente skupa $A$ nazivamo *originalima*, a element $y = f(x)$ nazivamo *slikom* originala $x$. Primijetimo da smo u navedenim primjerima vrijednosti originala $x$ proizvoljno (neovisno) birali i da smo onda određivali odgovarajuće vrijednosti $y$, tj. izbor $y$ je ovisio o odabranom $x$. Zbog toga se vrlo često kaže da je $x$ *neovisna varijabla*, a $y$ *ovisna varijabla* ili *funkcija* od $x$. Dakle, u prvom primjeru pređeni put je funkcija vremena, a u drugom primjeru ukupni troškovi su funkcija količine proizvoda. Zakonitost $f$ u našim primjerima se može i odrediti. Naime, u prvom primjeru je očigledno da je količnik slike i originala uvijek isti:

$$\frac{y}{x} = 25,$$

pa je

$$y = f(x) = 25x.$$

U drugom primjeru može se uočiti da vrijedi slična zakonitost prema kojoj je količnik slike umanjene za 5 i originala uvijek isti i iznosi 10, tj.

$$\frac{y-5}{x} = 10,$$

pa je u ovom slučaju

$$y = f(x) = 10x + 5.$$

Vrlo često je ta zakonitost data unaprijed (ali nisu poznati skupovi $A$ i $B$), kada kažemo da je funkcija zadana analitički. Npr.

$$y = 3x^2,\ y = \frac{2}{2x-1},\ y = \sqrt{x^2-1}.$$

Postavlja se pitanje da li je u svakom pojedinom slučaju $A = \mathbb{R}$ ili je $A$ pravi podskup (najčešće interval ili unija više intervala) skupa $\mathbb{R}$? Zbog toga se uvodi pojam *definicionog područja* ili *oblasti definicije funkcije*, koji definiramo kao skup svih onih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $y = f(x) \in \mathbb{R}$, a označavamo ga sa $\mathcal{D}(f)$. Očigledno je

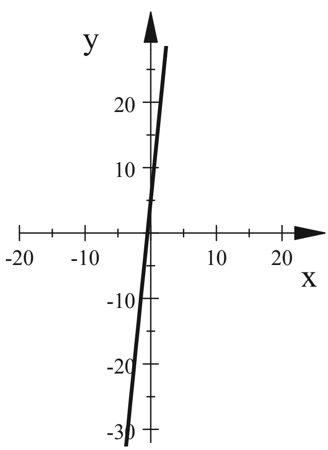
$$\mathcal{D}\left(3x^2\right) = \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}\left(\frac{2}{2x-1}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},$$

$$\mathcal{D}\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 0\right\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

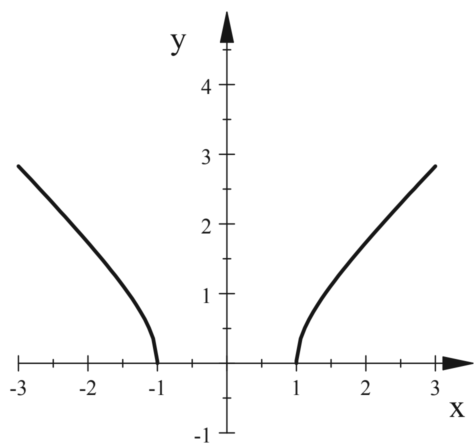
Ukoliko nam je poznat analitički izraz funkcije ili ako imamo njen tabelarni prikaz, onda se funkcija može i grafički predstaviti u pravouglom Descartesovom koordinatnom sistemu kao skup

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{D}(f) \wedge y = f(x)\},$$

koji nazivamo *grafom* funkcije $f$. Taj način predstavljanja funkcije je i najrazumljiviji. Na Slici GF1 dat nam je grafik funkcije $y = 10x+5$, a na Slici GF2 graf funkcije $y = \sqrt{x^2-1}$.




**Slika GF1**




**Slika GF2**

Navedimo još neke važne osobine koje određene funkcije mogu posjedovati, kao što su *injektivnost, surjektivnost* i *bijektivnost.*

**Definicija 2.2** *Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da ima osobinu* ***injektivnosti*** *ili da je* ***injektivna*** *funkcija ako vrijedi*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in A),$$

*tj. ako različitim originalima odgovaraju različite slike.*

**Definicija 2.3** *Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da ima osobinu **surjektivnosti (sirjektivnosti)** ili da je **surjektivna (sirjektivna)** funkcija ako je svaki element skupa $B$ slika nekog elementa iz skupa $A$.*

**Napomena 2.1** *Ukoliko funkcija $f : A \to B$ nije surjektivna, surjektivnost se može postići tako što se umjesto skupa $B$ razmatra skup $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.*

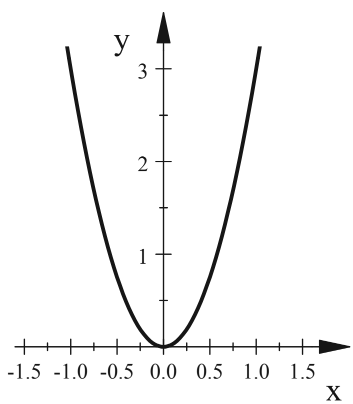
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = 10x + 5$ je injektivna, jer za $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 10x_1 \neq 10x_2 \Rightarrow 10x_1 + 5 \neq 10x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

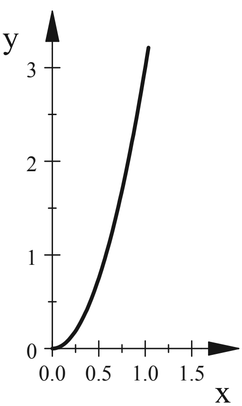
Međutim, funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty), y = f(x) = 3x^2$ nije injektivna, jer originali $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ (koji su međusobno različiti) imaju jednake slike:

$$y_1 = f(x_1) = f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3, \quad y_2 = f(x_2) = f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Ukoliko bismo promatrali funkciju $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), y = f(x) = 3x^2$, ona bi bila injektivna funkcija (v. Sliku GF3 i Sliku GF4).




**Slika GF3**




**Slika GF4**

**Definicija 2.4** *Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je **bijektivna** ako je ona injektivna i surjektivna.*

Funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x) = 10x + 5$ i $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty), y = f(x) = 3x^2$ su bijektivne funkcije.

Dakle, kod bijektivne funkcije $f : A \to B$ svaki element $y$ iz skupa $B$ je slika tačno jednog elementa $x$ iz skupa $A$, tj. vrijedi $y = f(x)$. Na taj način možemo promatrati i "obrnutu" funkciju, označimo je sa $f^{-1}$, sa skupa $B$ u skup $A$, pri

## 2.3 Primjena funkcija u ekonomiji

Pojedine ekonomske veličine mogu biti u međusobnoj ovisnosti, tj. promjena jedne od njih može prouzročiti promjenu jedne ili više drugih. Ipak, postaviti određenu vezu između pojedinih ekonomskih veličina nije nimalo jednostavan posao. Naime, može se dogoditi da promjena jedne ekonomske veličine izaziva promjenu neke druge, a da obrnuto ne vrijedi. Tako, na primjer, nacionalni dohodak jedne zemlje ne ovisi o broju tv prijemnika u toj zemlji, ali obrnuto - broj tv prijemnika u jednoj zemlji osjetno ovisi o nacionalnom dohotku. Ako, dakle, sa $x$ označimo nacionalni dohodak, a sa $y$ broj tv prijemnika, imat ćemo funkcionalnu ovisnost $y = f(x)$. Ovdje je potreban poseban oprez pri prevođenju ove funkcije u njen inverzni oblik $x = \varphi(y)$. Iako to s matematičkog aspekta ima opravdanje, s ekonomskog aspekta nema nikakva smisla i može nas u općem slučaju čak dovesti u opasnost izvođenja pogrešnih zaključaka. Zbog toga je jako važno nametnuti određene uvjete na funkcije kako bi one u izvjesnom smislu mogle predstavljati ekonomske funkcije, tj. da bi takav matematički model imao smisla u stvarnosti. Za sve funkcije koje se primjenjuju u ekonomiji, a mi ih budemo ovdje spominjali, navest ćemo takve uvjete, koji će činiti oblast definicije funkcije u ekonomskom smislu (oblast koja je općenito uža od definicionog područja funkcije u matematičkom smislu). Naravno, nećemo se ovdje baviti pitanjem samog načina formiranja funkcija koje se primjenjuju u ekonomiji, ali hoćemo njihovom oblašću definicije u ekonomskom smilsu.

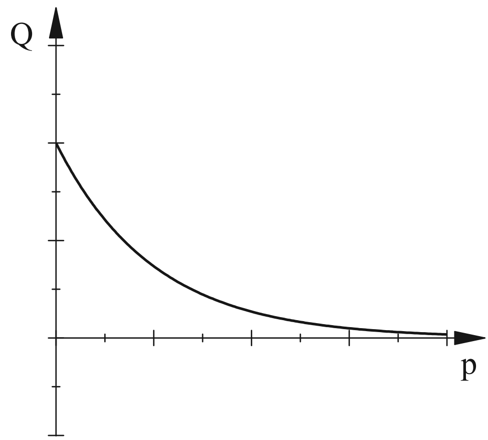
### 2.3.1 Funkcija potražnje

Neka se na nekom tržištu, između ostalog, nudi i traži jedan proizvod $A$ i neka je $Q$ ukupna količina tog proizvoda koju potražuju potrošači na tom tržištu. Ukoliko pretpostavimo da su zadovoljeni neki bitni kriteriji tržišta (nepromjenjivost: ukupnog broja potrošača, ukusa svih potrošača, prihoda svakog potrošača i cijena svih ostalih proizvoda na tom tržištu), količina potražnje proizvoda $A$ ovisit će samo o njegovoj tržišnoj cijeni. Označimo sa $p$ cijenu proizvoda $A$. Jasno je da će se s promjenom cijene $p$ mijenjati i ukupna potražnja $Q$ proizvoda $A$, tj. potražnja $Q$ je funkcija cijene $p$, tj.

$$Q = D(p) \quad (= Q_d).$$

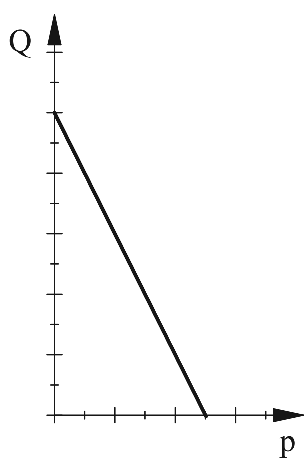
Ali i obrnuto, ako se mijenja ukupna količina potražnje proizvoda $A$, doći će i do promjene njegove cijene $p$. Zato ovdje ima smisla govoriti o inverznoj funkciji gornje funkcije i u ekonomskom smislu. Dakle, cijena je ovdje funkcija od potražnje, tj.

$$p = p(Q).$$

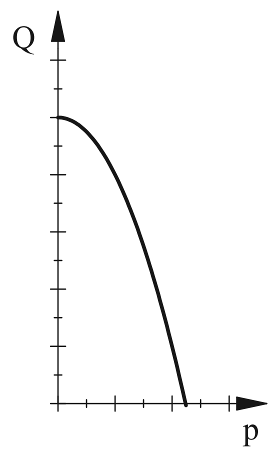



**Slika EF1:** $Q = ae^{-cp}, a > 0, c > 0$

Uočimo bitne odrednice funkcije potražnje. Naime, kako smo to vidjeli u slučaju tržišne ravnoteže (Sekcija 1.3.1), kad smo imali jednostavan slučaj linearne funkcije, vrijedi i općenito: s povećanjem cijene dolazi do pada potražnje, a u krajnjem slučaju kad se dostigne kritična cijena potražnja postaje jednaka 0 (Slika EF2 i Slika EF3) ili da jednostavno se neograničeno smanjuje ka 0 (kažemo da teži ka 0) kada cijena neograničeno raste (Slika EF1).




**Slika EF2:** $y = -ap + b, a > 0, b > 0$

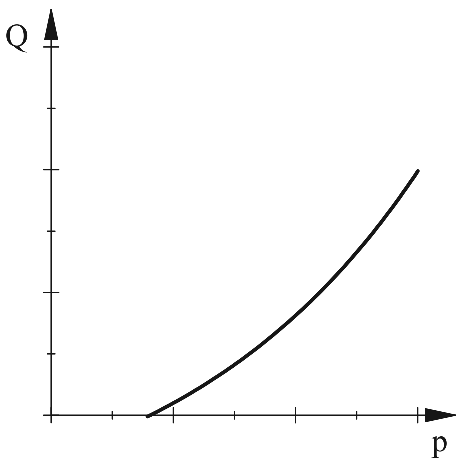



**Slika EF3:** $Q = -p^2 + c, c > 0$

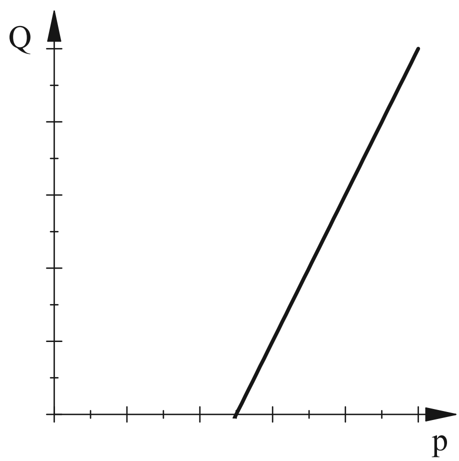
Dakle, funkcija potražnje mora biti opadajuća funkcija i definirana je samo za pozitivne vrijednosti promjenjive $p$. To je uvjet koji mora svaka funkcija potražnje, bez obzira kojeg je oblika, da zadovoljava. U slučaju linearne funkcije, ona mora imati negativni nagib.

### 2.3.2 Funkcija ponude

Pod ponudom podrazumijevamo količinu određenog proizvoda $A$ koju proizvođač nudi na nekom tržištu. U normalnim okolnistima ponuda će rasti s povećanjem cijene proizvoda. Zbog toga će funkcija ponude ($Q_s$) uvijek biti rastuća i definirana samo za nenegativnu promjenjivu $p$ (cijena proizvoda). Također, vrlo često se dešava da se izvjestan broj ponuđača uzdržava od prodaje proizvedene robe ako je cijena niska i uglavnom čeka povoljniji trenutak, tj. kad cijena dostigne onaj nivo za koji im se isplati prodavati robu. Osim toga, ako je tržišna cijena proizvoda niska, izvjestan broj proizvođača neće se odlučiti da proizvodi taj proizvod, jer bi pod tim uvjetima režijski troškovi doveli do gubitka. Tako će ponuda biti jednaka 0 za sve pozitivne vrijednosti cijene $p$ koje su manje od te kritične vrijednosti $p^*$, tj. $Q_s = S(p) = 0$, za sve $p \in [0, p^*]$. Kriva koja predstavlja funkciju ponude je, dakle, rastuća kriva s osobinom sporog rasta od kritične vrijednosti $p^*$, a onda s prelaskom u nagli rast (Slika EF4 i Slika EF5).




**Slika EF4:** $y = ce^x - a, a > 0, c > 0$




**Slika EF5:** $y = cx - d, c > 0, d > 0$

### 2.3.3 Funkcija troškova

Poznato je da su troškovi u jednoj proizvodnoj firmi novčani izraz za utrošene pojedine elemente procesa proizvodnje, kao što su sredstva za rad, predmet rada ili radna snaga. Zbog toga se oni mogu klasificirati prema različitim kriterijima, a

nas ovdje posebno zanima klasifikacija prema reagiranju na obim proizvodnje. Po toj klasifikaciji troškovi se dijele na *varijabilne* i *fiksne*. Varijabilni (promjenljivi) troškovi su oni troškovi koji ovise o obimu proizvodnje, tj. mijenjaju se u skladu s povećanjem ili smanjenjem obima proizvodnje, a također su uvjetovani i stepenom iskorištenosti kapaciteta. U varijabilne troškove se ubrajaju troškovi materijala za izradu (sirovine), troškovi korištenja energije, troškovi rada i sl. S druge strane, fiksni troškovi u ukupnom iznosu se ne mijenjaju, tj. fiksni su, za svaki dati obim proizvodnje. U takve troškove spadaju, na primjer, režijski troškovi, troškovi osiguranja, troškovi zakupnine, troškovi amortizacije, troškovi kamata na kredite i sl. Bitna karakteristika fiksnih troškova je da oni postoje neovisno o tome da li se proces proizvodnje izvodi ili ne.
*Ukupni troškovi* predstavljaju zbir varijabilnih i fiksnih troškova. Uvedimo sljedeće oznake: $T$ - za ukupne troškove, $VT$ - za varijabilne troškove, $FT$ - za fiksne troškove, pa je

$$T = VT + FT.$$

Ako sa $Q$ označimo obim proizvodnje, tj. količinu proizvoda, jasno je da je veličina varijabilnih troškova u funkcionalnoj ovisnosti o količini proizvodnje $Q$, tj. $VT(Q)$, pa je i funkcija ukupnih troškova, također, u funkcionalnoj ovisnosti o obimu proizvodnje $Q$, tj. $T(Q)$, dok fiksni troškovi ne ovise o varijabli $Q$, pa imamo

$$T(Q) = VT(Q) + FT. \tag{2.1}$$

Jasno je da je

$$VT(0) = 0.$$

Zbog toga je, prema relaciji (2.1),

$$FT = T(0). \tag{2.2}$$

Istaknimo da funkcija ukupnih troškova mora zadovoljavati određene uvjete (da bi uopće imala ekonomskog smisla):

a) $Q \geq 0$, odnosno obim proizvodnje ne može biti negativna vrijednost,
b) $T(Q) > 0$, tj. troškovi su uvijek pozitivni,
c) porast obima proizvodnje uvijek dovodi do rasta ukupnih troškova.

Ovi uvjeti čine oblast definiranosti funkcije ukupnih troškova.
Matematski izraz posljednjeg uvjeta navest ćemo nešto kasnije, nakon uvođenja pojma izvoda funkcije i pojma marginalnih (graničnih) troškova.

**Primjer 2.2** *Neka je data funkcija $T(Q) = 3Q^2 + 200$. Vidimo da je tada*

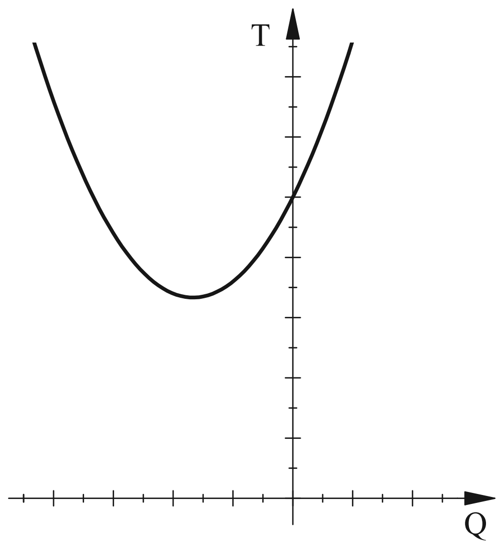
$$T(0) = 3 \cdot 0^2 + 200 = 200 = FT.$$

*Pokretanjem proizvodnje i povećanjem njenog obima očito je da će doći do porasta dijela troškova označenih sa* $3Q^2$*, odnosno do porasta varijabilnih troškova, a samim tim i do porasta ukupnih troškova. Dakle, zadovoljena su sva tri uvjeta koje mora zadovoljavati funkcija ukupnih troškova.* ♣

**Primjer 2.3** *Može se i općenito postaviti pitanje: pod kojim uvjetima funkcija ukupnih troškova može biti predstavljena kvadratnom funkcijom? Naime, ako je*

$$T\left(Q\right) = aQ^2 + bQ + c, \tag{2.3}$$

*tada, prije svega, mora da bude* $a > 0$*, tj. parabola mora biti okrenuta otvorom prema gore, odnosno funkcija mora imati minimum.*




**Slika EF6:** $T\left(Q\right) = aQ^2 + bQ + c$, $a > 0, b > 0, c > 0$

*Osim toga, za sve nenegativne vrijednosti promjenjive* $Q$ *(uvjet a)),* $T\left(Q\right)$ *mora da bude pozitivna (uvjet b)) i stalno da raste (uvjet c)), što će biti ispunjeno ako su fiksni troškovi pozitivni, tj.* $FT = T\left(0\right) = c > 0$ *i ako se minimum funkcije dostiže za negativne vrijednosti promjenjive* $Q$*, odnosno ako je tjeme parabole s lijeve strane koorditanog početka, tj. ako je*

$$-\frac{b}{2a} < 0,$$

*odnosno* $b > 0$*. Dakle, kvadratna funkcija (2.3), može biti funkcijom ukupnih troškova samo ako su sva tri koeficijenta* $a, b$ *i* $c$ *pozitivna.* ♣

Vrlo važnu ulogu u praksi igraju tzv. *prosječni troškovi*, koji predstavljaju iznos ukupnih troškova po jedinici proizvoda. Ako funkciju prosječnih troškova označimo sa $\overline{T}(Q)$, tada je

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q}. \tag{2.4}$$

Uočimo da je oblast definiranosti funkcije prosječnih troškova ista kao i oblast definiranosti ukupnih troškova.

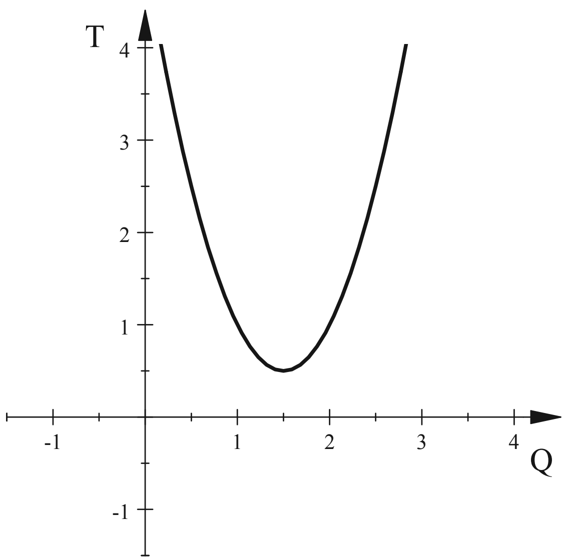
**Primjer 2.4** *Data je funkcija ukupnih troškova*

$$T(Q) = 2Q^3 - 6Q^2 + 5Q.$$

*Odrediti minimalne prosječne troškove i na kojem nivou proizvodnje se dotižu.*

*Rješenje.* Funkcija prosječnih troškova, prema (2.4), je

$$\overline{T}(Q) = 2Q^2 - 6Q + 5.$$




**Slika EF7**

Ovo je kvadratna funkcija i ona dotiže minimum na nivou proizvodnje

$$Q = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2},$$

koji iznosi

$$\overline{T}_{\min} = \overline{T}\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 5 = \frac{1}{2}. \quad \clubsuit$$

### 2.3.4 Funkcije prihoda i dobiti

*Ukupni prihod* predstavlja proizvod količine određene robe prodate na tržištu u određenom vremenskom razdoblju i cijene po kojoj je ta roba prodata. Ako za cijenu uvedemo oznaku $p$, a za ukupni prihod oznaku $P$, onda je

$$P = Q \cdot p.$$

Uočimo da je količina prodate robe na tržištu ustvari funkcija potražnje za tom robom. Poznato je da se potražnja izražava kao funkcija cijene proizvoda, tj. $Q = Q(p)$, pa je u tom slučaju ukupni prihod funkcija cijene $p$:

$$P(p) = Q(p) \cdot p. \tag{2.5}$$

Međutim, i cijena robe se može promatrati kao funkcija potražnje, tj. $p = p(Q)$ i tada je i ukupni prihod funkcija potražnje $Q$:

$$P(Q) = Q \cdot p(Q). \tag{2.6}$$

Pri tome su $p(Q)$ i $Q(p)$ međusobno inverzne funkcije.

**Primjer 2.5** *Zadana je funkcija potražnje $Q_d = 80-4p$. Odrediti funkciju ukupnog prihoda kao funkciju cijene, a zatim i kao funkciju potražnje.*

*Rješenje.* Malo lakši dio posla u ovom slučaju je naći ukupan prihod kao funkciju cijene. Prema (2.5) imamo

$$P(p) = Q_d \cdot p = (80-4p)\,p = -4p^2 + 80p.$$

S druge strane, želimo li funkciju ukupnog prihoda predstaviti kao funkciju potražnje kao u (2.6), moramo prvo cijenu predstaviti kao funkciju potražnje. Naime, iz $Q = 80 - 4p$, imamo

$$4p = 80 - Q \Rightarrow p = \frac{80-Q}{4} = 20 - \frac{Q}{4},$$

pa je

$$P(Q) = Q \cdot p(Q) = Q\left(20 - \frac{Q}{4}\right) = 20Q - \frac{Q^2}{4}. \quad \clubsuit$$

Primijetimo da je *prosječni prihod* količnik ukupnog prihoda i ukupne količine prodatih proizvoda, tj. funkcija prosječnih prihoda je oblika

$$\overline{P}(Q) = \frac{P(Q)}{Q} = \frac{Q \cdot p(Q)}{Q} = p(Q).$$

# Poglavlje 3

# Diferencijalni račun funkcija jedne varijable

## 3.1 Granična vrijednost funkcije

### 3.1.1 Pojam granične vrijednosti funkcije

Granična vrijednost funkcije opisuje šta se događa s funkcijom $f(x)$ kad se njena neovisna varijabla $x$ sve više približava ka nekom određenom broju $c$. Da bismo ilustrirali ovaj koncept, pretpostavimo da želimo znati šta se događa s funkcijom $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ kad se $x$ približava ka 1. Iako funkcija $f(x)$ nije definirana u tački $x = 1$, ipak ćemo moći dočarati njeno ponašanje izračunavanjem njenih vrijednosti koristeći vrijednosti neovisne varijable $x$ koje su sve bliže i bliže broju 1 s njegove obje strane: i s lijeve i s desne. Učinimo to prvo s lijeve strane (Tabela 3.1).

| $x$ | 0.5 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.99 | 0.999 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3.5 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 3.95 | 3.99 | 3.999 | ND |

**Tabela 3.1**

Uočavamo sljedeće: što se više varijabla $x$ približava broju 1 s njegove lijeve strane, odnosno preko brojeva manjih od 1 (kažemo da se $x$ rastući približava broju 1), a što simbolički pišemo kao $x \uparrow 1$ ili $x \to 1-0$ ili $x \to 1^-$, to se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više približavaju vrijednosti 4. Može se to iskazati i ovako: konvergentnom nizu brojeva neovisne varijable $x$ odgovara konvergentan niz vrijednosti funkcije $f(x)$. U ovom slučaju kažemo da funkcija u tački $x = 1$ ima *lijevu graničnu* *vrijednost* 4 i to simbolički označavamo sa:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4.$$

Analogno, izvedimo ovaj postupak u slučaju kad se $x$ približava broju 1 s njegove desne strane (Tabela 3.2).

| $x$ | 1 | 1.001 | 1.01 | 1.05 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ND | 4.001 | 4.01 | 4.05 | 4.1 | 4.2 | 4.3 | 4.5 |

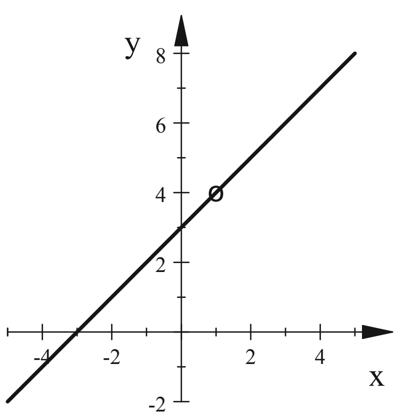
**Tabela 3.2**

Ovdje uočavamo sljedeće: što se više varijabla $x$ približava broju 1 s njegove desne strane, odnosno preko brojeva većih od 1 (kažemo da se $x$ opadajući približava broju 1), a što simbolički pišemo kao $x \downarrow 1$ ili $x \to 1 + 0$ ili $x \to 1^+$, to se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više približavaju vrijednosti 4. U ovom slučaju kažemo da funkcija u tački $x = 1$ ima *desnu graničnu vrijednost* 4 i to simbolički označavamo sa:

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4.$$

Opći je zaključak da se vrijednosti funkcije $f(x)$ sve više približavaju vrijednosti 4 kad $x$ s vrijednostima bude sve bliži i bliži broju 1 s obje njegove strane (v. Sliku GV1). U tom slučaju kažemo da funkcija $f(x)$ ima *graničnu vrijednost* 4 u tački $x = 1$, simbolički

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4.$$

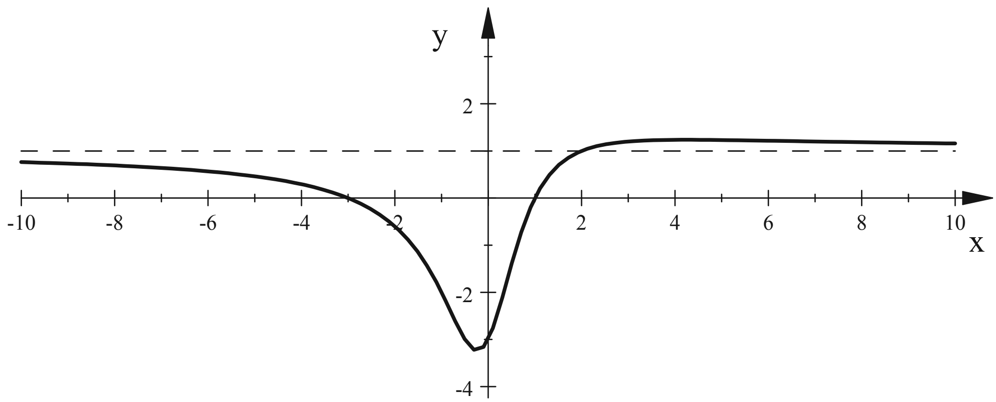



**Slika GV1**

Općenito: ako se vrijednosti $f(x)$ sve više približavaju nekom broju $A$ kad $x$ s vrijednostima bude sve bliži i bliži broju $a$ s obje njegove strane, u tom slučaju kažemo da funkcija $f(x)$ ima *graničnu vrijednost* $A$ u tački $x = a$, simbolički

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

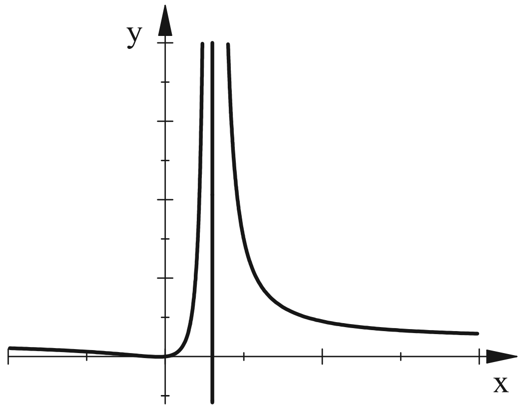
Primijetimo da vrijedi: funkcija $f(x)$ ima graničnu vrijednost $A$ u tački $x = a$ ako i samo ako funkcija $f(x)$ ima i lijevu i desnu graničnu vrijednost $A$ u tački $x = a$ i ako su te vrijednosti međusobno jednake.



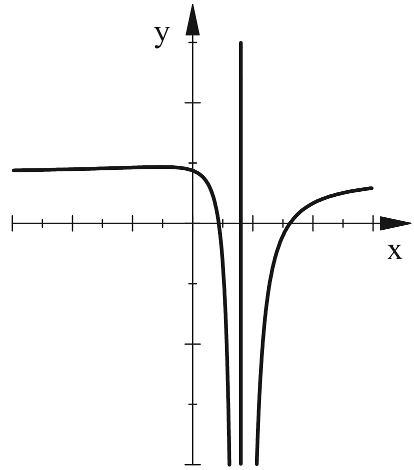

**Slika GV2**

Naravno da se definicija granične vrijednosti funkcije u nekoj tački $x = a$ može i formalizirati. Naime, *za broj* $A$ *reći ćemo da je granična vrijednost funkcije u tački* $x = a$ *ako za proizvoljno odabran broj* $\varepsilon > 0$, *postoji broj* $\delta > 0$, *takav da za sve vrijednosti neovisne varijable* $x$ *koje su dovoljno blizu broja* $a$, *tj. za sve* $x \in O_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, *vrijedi i da su odgovarajuće vrijednosti funkcije* $f(x)$ *dovoljno blizu vrijednosti broja* $A$, *tj.* $f(x) \in O_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$. Uočimo da funkcija uopće ne mora biti definirana u tački $x = a$, kao što je to slučaj sa funkcijom $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$, koja nije definirana u $x = 1$. Možemo razmotriri i sljedeće situacije. Ako pustimo da vrijednosti neovisne varijable neograničeno rastu (kažemo da $x$ teži u $+\infty$, tj. $x \to +\infty$) i ako su pri tome vrijednosti funkcije $f(x)$ sve bliže i bliže vrijednosti $A$, kažemo da funkcija ima graničnu vrijednost $A$ kada $x \to +\infty$, simbolički

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$




Slika GV3



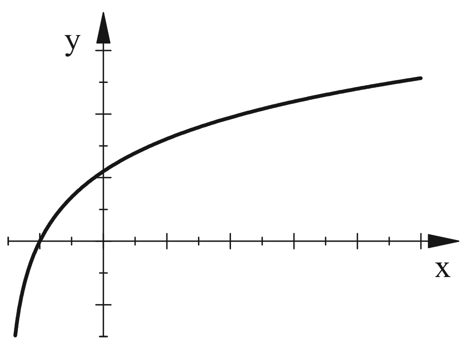

Slika GV4

Analogno se definira i granična vrijednost funkcije kad $x \to -\infty$ i simbolički zapisujemo

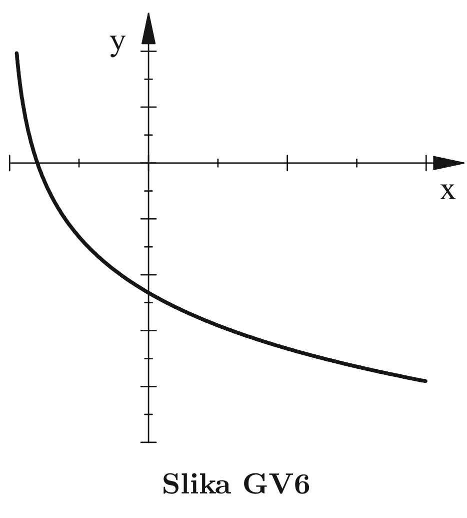
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

Obje situacije su ilustrirane primjerom funkcije na Slici GV2, gdje vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \ i \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$




Slika GV5




Slika GV6

Koristeći se kalkulatorom, dobije se $\ln 2 \simeq 0.0198026273$.

*b)* Znajući da je $\sqrt[3]{125} = 5$, ovdje ćemo uzeti $x = 125$ i $\Delta x = dx = -2$. Kako je za funkciju $y = \sqrt[3]{x}$ njen diferencijal $dy = y'dx = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, imamo

$$\sqrt[3]{123} \simeq y(125) + dy = \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3}125^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) = 5 - \frac{2}{75} \simeq 4.9733333333.$$

Koristeći se kalkulatorom, dobijemo $\sqrt[3]{123} \simeq 4.973189833$. ♣

**Napomena 3.2** *Uočimo da vrijedi:*

*a)* $d(cf(x)) = c \cdot df(x)$ *($c$ konstanta),* *b)* $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$,

*c)* $d[f(x)g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$,

*d)* $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{[g(x)]^2}$.

### 3.6.1 Primjeri primjene diferencijala u ekonomiji

Navedimo par vrlo karaktersitičnih primjena diferencijala u ekonomskoj praksi.

**Primjer 3.15** *Pretpostavimo da je ukupni trošak proizvodnje $Q$ jedinica određenog proizvoda*

$$T(Q) = 3Q^2 + 5Q + 10.$$

*Ako je sadašnji nivo proizvodnje 40 jedinica, procijeniti za koliko će se promijeniti ukupni troškovi ako bi se proizvelo 40.5 jedinica.*

*Rješenje.* U ovom primjeru je sadašnja vrijednost neovisne varijable $Q = 40$, a njen prirast je $\Delta Q = dQ = 0.5$. Prema aproksimacionoj formuli, odgovarajuća promjena ukupnih troškova je

$$\Delta T = T(40.5) - T(40) \approx T'(40)\Delta Q.$$

Kako je

$$T'(Q) = 6Q + 5 \quad \text{i} \quad T'(40) = 6 \cdot 40 + 5 = 245,$$

slijedi da je

$$\Delta T \simeq T'(40) \cdot 0.5 = 245 \cdot 0.5 = 122.5\,(\$).$$

Provjerimo kolika je promjena ukupnih troškova ako se računa njihova razlika na nivoima $Q = 40.5$ i $Q = 40$. Naime, kako je

$$T(40.5) = 3 \cdot 40.5^2 + 5 \cdot 40.5 + 10 = 5133.25,$$

$$T(40) = 3 \cdot 40^2 + 5 \cdot 40 + 10 = 5010,$$

to je

$$\Delta T = T(40.5) - T(40) = 5133.25 - 5010 = 123.25\,(\$),$$

pa zaključujemo da je već izračunata približna vrijednost manja samo za 0.75 (\$). ♣

U sljedećem primjeru, koji se često javlja u praksi, poznata je željena promjena funkcije, a cilj je procijeniti potrebnu odgovarajuću promjenu neovisne varijable.

**Primjer 3.16** *Dnevna proizvodnja (output) u nekoj tvornici je* $Q(L) = 900L^{\frac{1}{3}}$, *gdje* $L$ *označava veličinu radne snage mjerene u radnim satima. Sada se svakodnevno koristi* 1000 *radnih sati. Procijeniti broj dodatnih radnih sati radnika ako se planira povećati dnevna proizvodnja za* 15 *jedinica.*

*Rješenje.* Odredimo $\Delta L$ koristeći aproksimacionu formulu

$$\Delta Q \simeq Q'(L)\,\Delta L,$$

sa

$$\Delta Q = 15, \quad L = 1000 \quad \text{i} \quad Q'(L) = 300L^{-\frac{2}{3}} = 300 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1000^2}} = 300 \cdot \frac{1}{100} = 3.$$

Naime,

$$\Delta L \simeq \frac{\Delta Q}{Q'(L)} = \frac{15}{3} = 5 \text{ (radnih sati).} \quad ♣$$

◦ ◦ ◦

## Zadaci za samostalan rad

1. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $(1.003)^5$.

2. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $e^{-0.02}$.

3. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $\sin 31^\circ$.

4. Koristeći se diferencijalom funkcije jedne varijable, odrediti približnu vrijednost izraza $\sqrt[4]{17}$.

**Primjer 3.21** *Odrediti 5-ti izvod svake od sljedećih funkcija:*
*a)* $f(x) = 16x^4 - 2x^2 + 5x - 10,$ *b)* $y = \frac{1}{x}.$

*Rješenje.* a) $f'(x) = 64x^3 - 4x + 5$
$$f''(x) = \left(64x^3 - 4x + 5\right)' = 192x^2 - 4$$
$$f'''(x) = \left(192x^2 - 4\right)' = 384x$$
$$f^{(4)}(x) = (384x)' = 384$$
$$f^{(5)}(x) = (384)' = 0$$

b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(-x^{-2}\right) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^{-3}\right) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{6}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}\left(-6x^{-4}\right) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{24}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}\left(24x^{-5}\right) = -120x^{-6} = -\frac{120}{x^6}$$

Ovdje se može naći općenito $n$-ti izvod: $\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$ (što je lahko ustanoviti indukcijom). ♣

### 3.8.1 Primjer primjene u ekonomiji

Općenitu primjenu izvoda i diferencijala višeg reda vidjet ćemo nešto kasnije, posebno pri određivanju lokalnih ekstrema funkcije. No, sljedeći primjer je dobra ilustracija primjene izvoda višeg reda u ekonomiji.

**Primjer 3.22** *Jedna ekonomska studija jutarnjih dolazaka u određenoj tvornici ustanovila je da prosječno radnik koji dolazi na posao u 8:00 sati ima produktivnost* $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$ *jedinica proizvoda za* $t$ *narednih sati.*
*a) Izračunati brzinu produktivnosti radnika u 11:00 sati.*
*b) Kolika je brzina promjene brzine produktivnosti radnika u odnosu na vrijeme u 11:00 sati?*
*c) Procijeniti promjenu u brzini produktivnosti radnika između 11:00 i 11:10 sati.*
*d) Izračunati aktuelnu promjenu u produktivnosti radnika između 11:00 i 11:10 sati.*

*Rješenje.* a) Brzina produktivnosti radnika je prvi izvod

$$Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$$

funkcije outputa $Q(t)$. U 11:00 sati je $t = 3$, pa je tražena brzina promjene produktivnosti

$$Q'(3) = -3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 24 = 33$$

jedinice proizvoda po satu.

b) Brzina promjene brzine produktivnosti radnika je drugi izvod

$$Q''(t) = -6t + 12$$

funkcije outputa $Q(t)$. U 11:00 sati ova brzina je

$$Q''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6$$

jedinica po satu po satu. Znak minus u rezultatu znači da brzina produktivnosti radnika opada, to jest radnik usporava. Brzina ovog opadanja efikasnosti u 11:00 sati je 6 jedinica po satu po satu (ili po satu na kvadrat).

c) Primijetimo da je 10 minuta ustvari $\frac{1}{6}$ sata. Da bismo procijenili promjenu $\Delta Q'$ u brzini produktivnosti $Q'(t)$ uočimo da je promjena u vremenu $\Delta t = \frac{1}{6}$ sata, a onda primijenimo aproksimacionu formulu iz Sekcije 3.6 (u općenitoj formi):

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x.$$

Tako imamo

$$\Delta Q' \simeq Q''(t)\,\Delta t,$$

odnosno

$$\Delta Q' \simeq Q''(3)\,\Delta t = -6 \cdot \frac{1}{6} = -1 \text{ jedinica proizvoda po satu.}$$

Dakle, brzina produktivnosti (koja je bila 33 jedinice proizvoda po satu u 11:00 sati) će opasti približno za 1 jedinicu proizvoda po satu (bit će, dakle, približno 32 jedinice proizvoda po satu) u narednih 10 minuta rada.

d) Aktuelna promjena brzine produktivnosti radnika između 11:00 i 11:10 sati je jednaka razlici vrijednosti brzina produktivnosti u 11:10 i u 11:00 sati, tj. kad je $t = 3\frac{1}{6} = \frac{19}{6}$ i $t = 3$:

$$\begin{aligned}
\Delta Q' &= Q'\left(\frac{19}{6}\right) - Q'(3) = \\
&= \left[-3\cdot\left(\frac{19}{6}\right)^2 + 12\cdot\frac{19}{6} + 24\right] - \left[-3\cdot 3^2 + 12\cdot 3 + 24\right] \\
&\simeq 31.92 - 33 = -1.08 \text{ jedinica proizvoda po satu.}
\end{aligned}$$

Dakle, u 11:10 sati brzina (stopa) produktivnosti, koja je bila 33 jedinice proizvoda po satu, aktuelno će opasti za 1.08 jedinica proizvoda po satu, tj. na 31.92 jedinice proizvoda po satu. ♣

∘ ∘ ∘

## Zadaci za samostalan rad

**1.** Odrediti drugi izvod svake od sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{4}{5}$, b) $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^3$.

**2.** Ukoliko postoji, odrediti $f''(0)$ za funkciju $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

**3.** Izračunati $\frac{d^2y}{dx^2}$ funkcije date u implicitnom obliku $2x^2 + 5y^2 = 10$.

**4.** Odrediti $\frac{d^3y}{dx^3}$ ako je $y = \sqrt{x} - \frac{2}{3x} + \frac{x}{\sqrt{2}}$.

**5.** Naći $xf''(x) - 2f'(x) - \frac{4}{x}f(x)$ ako je $f(x) = x^3 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

**6.** Jedna ekonomska studija jutarnjih dolazaka u određenoj tvornici ustanovila je da prosječno radnik koji dolazi na posao u 8:00 sati ima produktivnost $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ jedinica proizvoda za $t$ narednih sati.

a) Izračunati brzinu produktivnosti radnika u 9:00 sati.

b) Kolika je brzina promjene brzine produktivnosti radnika u odnosu na vrijeme u 9:00 sati?

c) Procijeniti promjenu u brzini produktivnosti radnika između 9:00 i 9:15 sati.

## 3.11 Primjena diferencijalnog računa u ekonomiji

Ogromna je primjena diferencijalnog računa u ekonomiji. Mi ćemo ovdje demonstrirati tu primjenu pri uvođenju pojmova graničnih (marginalnih) funkcija u ekonomiji i pri ispitivanju njihovih osobina. Osim toga, pokazat ćemo kako se diferencijalni račun primjenjuje i u proučavanju elastičnosti funkcije.

### 3.11.1 Granične (marginalne) funkcije

Neka nam je općenito data neka ekonomska funkcija $y = f(x)$ kojom se izražava neka ukupnost (ukupni troškovi, ukupni prihod, ukupna dobit, ukupna proizvodnja i sl.). *Granična (ili marginalna) funkcija* $Gy = Gy(x)$ definira se kao granična vrijednost količnika prirasta $\Delta y$ funkcije $y$ i prirasta $\Delta x$ argumenta $x$ kada prirast $\Delta x$ teži ka nuli, ako ta granična vrijednost postoji, tj.

$$Gy(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

odnosno

$$Gy(x) = \frac{dy}{dx} = y'_x.$$

Dakle, ukoliko nam je data neka ekonomska funkcija koja je diferencijabilna, onda *njen prvi izvod predstavlja graničnu ili marginalnu funkciju*, tj.

$$\boxed{\textit{granična funkcija} = (\textit{ekonomska funkcija})'.} \tag{3.16}$$

Na taj način definiramo sljedeće funkcije:
a) granični trošak $GT(Q)$ ili $GT(p)$ kao izvod funkcije ukupnih troškova, tj.

$$GT(Q) = \frac{dT}{dQ} = T'(Q) \quad \text{ili} \quad GT(p) = \frac{dT}{dp} = T'(p);$$

b) granični prihod $GP(Q)$ ili $GP(p)$ kao izvod funkcije ukupnih prihoda, tj.

$$GP(Q) = \frac{dP}{dQ} = P'(Q) \quad \text{ili} \quad GP(p) = \frac{dP}{dp} = P'(p);$$

c) granična dobit $GD(Q)$ ili $GD(p)$ kao izvod funkcije ukupne dobiti, tj.

$$GD(Q) = \frac{dD}{dQ} = D'(Q) \quad \text{ili} \quad GD(p) = \frac{dD}{dp} = D'(p);$$

d) granična sklonost potrošnji $GC(Y)$ (koja je funkcija dohotka $Y$) kao izvod funkcije potrošnje, tj.

$$GC(Y) = \frac{dC}{dY} = C'(Y);$$

e) granična sklonost štednji $GS(Y)$ (koja je funkcija dohotka $Y$) kao izvod funkcije štednje, tj.

$$GS(Y) = \frac{dS}{dY} = S'(Y);$$

itd.

Jednostavno objašnjenje za uvođenje pojma granične funkcije na ovaj način možemo naći, recimo, u slučaju graničnih troškova. Naime, granični troškovi se definiraju kao trošak proizvodnje dodatne jedinice proizvoda. Dakle, po toj definiciji vrijedi

$$GT(Q) = \frac{\Delta T}{\Delta Q} = \frac{T_2 - T_1}{Q_2 - Q_1},$$

gdje je $T_i = T(Q_i)$ za $i = 1, 2$. Međutim, kao što smo već rekli, ovaj količnik ćemo razmatrati za dovoljno male promjene $\Delta Q$, tj. pustit ćemo da $\Delta Q \to 0$, pa ćemo u slučaju diferencijabilnosti funkcije ukupnih troškova $T(Q)$ ustvari imati

$$GT(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta Q} = \frac{dT}{dQ}.$$

**Primjer 3.35** *Pretpostavimo da su ukupni troškovi (u dolarima) proizvodnje $Q$ jedinica određene robe dati sa $T(Q) = 3Q^2 + Q + 48$.*
*a) Na kojem nivou proizvodnje su prosječni troškovi najmanji i kolika je ta najmanja vrijednost?*
*b) Na kojem nivou proizvodnje su prosječni troškovi jednaki graničnim troškovima?*
*c) Na istoj slici grafički predstaviti obje funkcije, prosječne i granične troškove.*

*Rješenje.* a) Treba da odredimo apsolutni minimum funkcije prosječnih troškova

$$\overline{T}(Q) = \frac{T(Q)}{Q} = 3Q + 1 + \frac{48}{Q}$$

za $Q \in (0, +\infty)$ (jer samo tada funkcija ima ekonomskog smisla). Prvi izvod ove funkcije je

$$\overline{T}'(Q) = 3 - \frac{48}{Q^2} = \frac{3\left(Q^2 - 16\right)}{Q^2}$$

koja je jednaka nuli na intervalu $(0,+\infty)$ samo za $Q=4$, tj. $Q=4$ je stacionarna tačka. Kako je drugi izvod $\overline{T}''(Q)=\dfrac{96}{Q^3}$ pozitivan za sve $Q>0$, to znači da je prosječni trošak minimalan na nivou proizvodnje $Q=4$ i ta minimlna vrijednost je $\overline{T}_{\min}=\overline{T}(4)=25\,(\$)$.

b) Granični troškovi su $GT(Q)=T'(Q)=6Q+1$ i oni treba da su jednaki prosječnim troškovima, tj.

$$6Q+1=3Q+1+\frac{48}{Q},$$

odakle se dobije

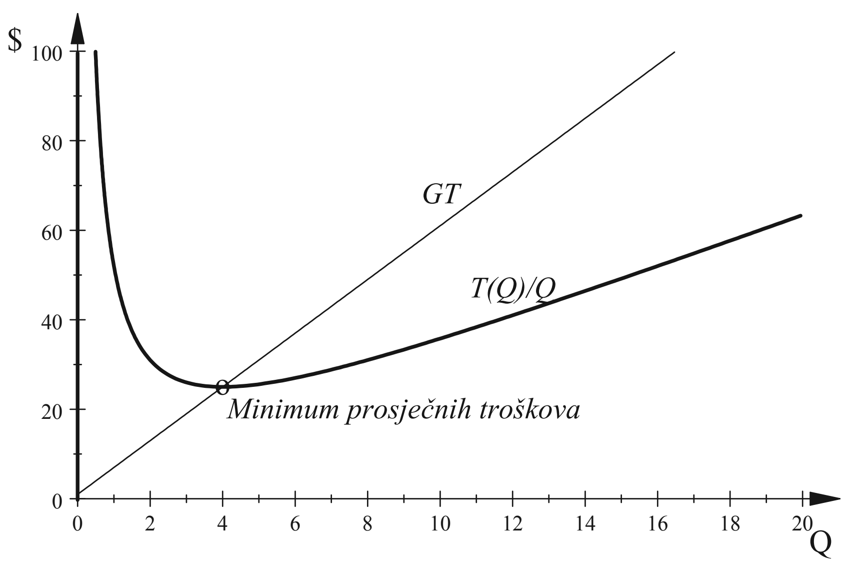
$$Q^2=16 \quad\Rightarrow\quad Q=4,$$

što je isti nivo proizvodnje na kome se ostvaruju i minimalni prosječni troškovi. Pokazat ćemo uskoro da ovo nije slučajno, nego da vrijedi općenito.

c) Graf funkcije graničnih troškova je linearna funkcija koja se jednostavno grafički predstavlja pravom. Primijetimo da je za prosječne troškove (v. pod a))

$$\overline{T}'(Q)=\frac{3\left(Q^2-16\right)}{Q^2}<0$$

za $0<Q<4$, dok je $\overline{T}'(Q)>0$ za $Q>4$. Dakle, funkcija prosječnih troškova je opadajuća za $0<Q<4$, a rastuća za $Q>4$ i ima lokalni minimum u $Q=4$. Grafici obiju funkcija su dati na Slici K5. ♣




**Slika K5**

Navedimo sada (s dokazom) spomenuti općeniti rezultat o vezi između prosječnih i graničnih troškova u slučaju kad su prosječni troškovi minimalni.

**Teorem 3.15** *Prosječni troškovi jednaki su graničnim troškovima ako su prosječni troškovi minimalni.*

**Dokaz.** Prema Teoremu 3.9 potreban uvjet egzistencije lokalnog ekstrema u nekoj vrijednosti neovisne varijable neke funkcije je da je izvod funkcije jednak nuli u toj vrijednosti neovisne varijable. Ako su prosječni troškovi minimalni, znači da postoji nivo proizvodnje $Q^*$ na kojem je $\overline{T}\left(Q^*\right) = \overline{T}_{\min}$, pa iz potrebnog uvjeta za egzistenciju ekstrema slijedi $\overline{T}'\left(Q^*\right) = \dfrac{d\overline{T}}{dQ}\left(Q^*\right) = 0$, odnosno

$$\overline{T}'\left(Q^*\right) = \frac{d\overline{T}}{dQ}\left(Q^*\right) = \frac{d}{dQ}\left(\frac{T\left(Q\right)}{Q}\right)\left(Q^*\right) = \left(\frac{Q \cdot \dfrac{dT}{dQ} - T \cdot 1}{Q^2}\right)\left(Q^*\right) = 0.$$

Odavde je

$$\left(Q \cdot \frac{dT}{dQ} - T\right)\left(Q^*\right) = 0,$$

tj.

$$Q^* \cdot T'\left(Q^*\right) = T\left(Q^*\right),$$

pa je

$$T'\left(Q^*\right) = \frac{T\left(Q^*\right)}{Q^*},$$

a što znači da je

$$GT\left(Q^*\right) = \overline{T}\left(Q^*\right)$$

upravo na nivou proizvodnje $Q = Q^*$ na kojem su prosječni troškovi minimalni. ■

Motivirani prethodnim teoremom možemo doći do zanimljive veze između prosječnih i graničnih troškova. Naime, ako je $GT\left(Q\right) < \overline{T}\left(Q\right)$, tada je

$$T'\left(Q\right) < \frac{T\left(Q\right)}{Q}, \text{ tj. } Q \cdot T'\left(Q\right) < T\left(Q\right),$$

pa imamo

$$\overline{T}'\left(Q\right) = \frac{Q \cdot T'\left(Q\right) - T\left(Q\right)}{Q^2} < 0,$$

što znači da je funkcija prosječnih troškova $\overline{T}\left(Q\right)$ opadajuća.

# Poglavlje 4

# Diferencijalni račun funkcija dvije i više varijabli

## 4.1 Funkcije dvije i više varijabli - osnovni pojmovi

Do sada smo imali priliku da izučavamo realne funkcije jedne varijable. Međutim, poznato je da u mnogim praktičnim situacijama vrijednost jedne veličine može ovisiti o vrijednostima druge dvije ili više drugih veličina. Na primjer, potražnja maslaca može ovisiti o cijeni maslaca i o cijeni margarina. Slično, količina proizvodnje nekog outputa iz neke tvornice može ovisiti o uloženom kapitalu i o uloženom radu. Na taj način, veličina koja ovisi o druge dvije veličine je funkcija dvije varijable. U skladu s općenitom definicijom funkcije, Definicijom 2.1, možemo dati preciznu definiciju realne funkcije dvije i više varijabli.

**Definicija 4.1** *Za funkciju $f : A \to B$, pri čemu su $A$ i $B$ neprazni skupovi, kažemo da je* ***realna funkcija dvije varijable*** *ako je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i $B \subseteq \mathbb{R}$, odnosno da je* ***realna funkcija*** *$n$* ***varijabli*** *ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $B \subseteq \mathbb{R}$.*

U slučaju kad je $f : A \to B$ realna funkcija dvije varijable, tada se, prema određenom zakonu $f$, svakom uređenom paru $(x, y) \in A$ pridružuje tačno jedan realan broj $z = f(x, y)$, a u slučaju kad je $f : A \to B$ realna funkcija $n$ varijabli, tada se svakoj uređenoj $n$-torci $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ pridružuje tačno jedan realan broj $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Predmet izučavanja ovog poglavlja će biti uglavnom realne funkcije dvije varijable, ali ćemo navesti i osnovne pojmove općenito vezane za realne funkcije $n$ varijabli. Slično kao kod realne funkcije jedne varijable i ovdje pod *domenom* ili *definicionim područjem* realne funkcije više varijabli podrazumijevamo skup $\mathcal{D}(f) \subseteq A$ svih uređenih $n$-torki $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ za koje je $z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$.

**Primjer 4.1** *Data je funkcija* $f(x,y) = \dfrac{2xy^2+7x}{x-3y}$.

*a) Odrediti definiciono područje od* $f$.

*b) Izračunati* $f(-1,2)$ *i* $f(4,0)$.

*Rješenje.* a) Očito je da će izraz $\dfrac{2xy^2+7x}{x-3y}$ biti definiran samo ako mu nazivnik nije nula, tj. ako je $x-3y \neq 0$, odnosno $y \neq \dfrac{x}{3}$. Dakle,

$$\mathcal{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \frac{x}{3}\right\}.$$

b) $f(-1,2) = \dfrac{2(-1)\cdot 2^2 + 7(-1)}{-1-3\cdot 2} = \dfrac{15}{7}$,

$f(4,0) = \dfrac{2\cdot 4\cdot 0^2 + 7\cdot 4}{4-3\cdot 0} = \dfrac{28}{4} = 7.$ ♣

U ekonomskoj praksi vrlo često korištena funkcija dvije varijable je tzv. **Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje**, kojom se izražava ovisnost količine outputa $Q$ iz određene tvornice o uloženom kapitalu $K$ i uloženom radu $L$ u obliku

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

gdje su $A$ i $\alpha$ pozitivne konstante i $0 < \alpha < 1$. Kasnije ćemo objasniti ekonomski smisao parametra $\alpha$ (kad bude riječi o tzv. koeficijentu parcijalne elastičnosti).

**Primjer 4.2** *Pretpostavimo da je u određenoj tvornici količina proizvoda* $Q$ *nekog outputa data u obliku Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje* $Q(K,L) = 50K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ *jedinica, gdje je* $K$ *uloženi kapital izražen u jedinicama od* 1000\$, *a* $L$ *uloženi rad izražen u radnim satima.*

*a) Izračunati količinu outputa ako je za njenu proizvodnju uložen kapital u vrijednosti* 343000\$, *i utrošeno* 1000 *radnih sati.*

*b) Pokazati da će količina proizvoda outputa iz dijela a) biti udvostručena ako se udvostruče obje varijable: i uloženi kapital i uloženi rad.*

*Rješenje.* a) Uvrštavanjem vrijednosti $K = 343$ hiljade dolara i $L = 1000$, dobijamo

$$Q(343,1000) = 50\cdot 343^{\frac{1}{3}}\cdot 1000^{\frac{2}{3}} = 50\cdot 7\cdot 100 = 35000$$

jedinica outputa.

b) Uzimajući $K = 2 \cdot 343$ i $L = 2 \cdot 1000$, imamo

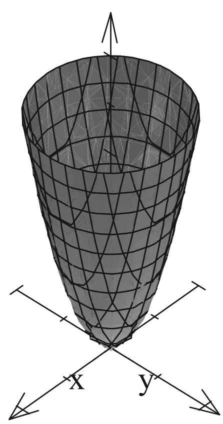
$$\begin{aligned} Q(2 \cdot 343, 2 \cdot 1000) &= 50(2 \cdot 343)^{\frac{1}{3}}(2 \cdot 1000)^{\frac{2}{3}} \\ &= 50 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 343^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 1000^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\left[50 \cdot 343^{\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{2}{3}}\right] \\ &= 2Q(343, 1000) = 2 \cdot 35000 \\ &= 70000 \end{aligned}$$

jedinica outputa. Dakle, zaista je količina outputa udvostručena kada je $K = 2 \cdot 343$ i $L = 2 \cdot 1000$, tj. kad su obje varijable, $K$ i $L$, udvostručene. ♣

Kao i kod realne funkcije jedne varijable i u slučaju realne funkcije dvije varijable, ukoliko imamo njen analitički izraz, moguće je funkciju grafički predstaviti u pravouglom Descartesovom koordinatnom sistemu u trodimenzionalnom prostoru kao skup

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \mathcal{D}(f) \wedge z = f(x, y)\},$$

koji nazivamo *grafom* funkcije $f$. Geometrijska predstava grafa funkcije dvije varijable je površ u prostoru. Na Slici FG1 predstavljen je graf funkcije $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ (što predstavlja površ u prostoru koju nazivamo paraboloidom).




Slika FG1

Važan pojam kod funkcija dvije varijable je *nivo linija*. Naime, ako je $C \in \mathbb{R}$ neka konstanta, tada je nivo linija funkcije $z = f(x, y)$ na nivou $C$ kriva $f(x, y) = C$. Nivo linije imaju veliku primjenu, posebno u ekonomiji. Ukoliko nam je $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje, onda nivo linija ove funkcije na nivou $C$ ima oblik $Q(K, L) = C$, odnosno

$$AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = C. \tag{4.1}$$

Posljednja relacija (4.1) pokazuje određenu kombinaciju vrijednosti varijabli $K$ i $L$ koje treba uzeti da bi količina proizvodnje bila na nivou $C$. Dobijena nivo linija (4.1) u ovom specijalnom slučaju se naziva *krivom konstantne proizvodnje* $C$, ili još jednostavnije, *izokvantom.*

U slučaju izokvante (4.1) jedna varijabla može se eksplicitno izraziti pomoću one druge, to jest, recimo, varijabla $K$ je funkcija od $L$:

$$K = K(L) = \left(CA^{-1}L^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.2}$$

**Primjer 4.3** *Data je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje* $Q(K, L) = 170K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$. *Odrediti kombinaciju uloženog kapitala i uloženog rada* $(K, L)$ *za koju je nivo proizvodnje* 1700 *jedinica outputa, a zatim kombinaciju* $(K, L)$ *za koju će nivo proizvodnje biti dvostruko veći od zadanog. Šta se može reći o odgovarajućim izokvantama?*

*Rješenje.* Prema datim podacima imamo sljedeću jednadžbu

$$1700 = 170K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}},$$

odakle je

$$K = \frac{10^4}{L^3}.$$

U drugom slučaju imamo

$$2 \cdot 1700 = 170K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}},$$

odakle je

$$K = 16 \cdot \frac{10^4}{L^3}.$$

Uočavamo da je izokvanta u drugom slučaju, koja odgovara većem nivou proizvodnje, "iznad" izokvante u prvom slučaju, koja odgovara nivou proizvodnje na datom nivou. ♣

Druga primjena nivo linija u ekonomiji uključuje koncept *krivih indiferencije.* Naime, kriva indiferencije predstavlja krivu s osobinom da je potrošač jednako tj. $Q_1^* = 46.25$. Maksimalna vrijednost funkcije korisnosti (zbog $\frac{d^2U}{dQ_1^2}(Q_1^*) = -8$) je

$$U_{\max} = -4 \cdot (46.25)^2 + 370 \cdot 46.25 + 1950 = 10506.25\ .$$

Ona se dostiže ako potrošač kupi $Q_1^* = 46.25$ jedinica prvog dobra i $Q_2^* = 107.5$ jedinica drugog dobra. Maksimalna vrijednost funkcije korisnosti može se dobiti i na sljedeći način

$$U_{\max} = U(Q_1^*, Q_2^*) = (2 \cdot 46.25 + 10)(107.5 - 5) = 10506.25\ . \quad \clubsuit$$

**Primjer 4.19** *Date su funkcije ukupnih troškova i funkcije proizvodnje u ovisnosti o uloženom radu $L$ i uloženom kapitalu $K$:*

$$T(L, K) = (L + K)^2 + 10, \quad Q(L, K) = K\sqrt{2L}.$$

*Naći kombinaciju uloženog rada i uloženog kapitala uz koju se na nivou proizvodnje $Q = 8$ ostvaruju minimalni troškovi. Koliki su ti minimalni troškovi?*

*Rješenje.* Treba, dakle, minimizirati funkciju ukupnih troškova $T$ uz ograničenje

$$K\sqrt{2L} = 8.$$

Odavde je $L = \frac{32}{K^2}$, pa zamjenom u funkciji $T$, imamo

$$T = \left(\frac{32}{K^2} + K\right)^2 + 10.$$

Iz

$$\frac{dT}{dK} = 2\left(\frac{32}{K^2} + K\right)\left(-\frac{64}{K^3} + 1\right) = 0,$$

zbog pozitivnosti veličine $K$ (u suprotnom zadatak ne bi imao ekonomskog smisla), slijedi da je $K = 4$. Kako je

$$\frac{d^2T}{dK^2} = 2\left(-\frac{64}{K^3} + 1\right)^2 + 2\left(\frac{32}{K^2} + K\right) \cdot \frac{192}{K^4},$$

vrijedi $\frac{d^2T(4)}{dK^2} = 12 \cdot \frac{192}{256} > 0$, pa zaista funkcija $T$ ima minimum za $K = 4$ (i $L = 2$). Minimalni troškovi iznose

$$T_{\min} = T(2, 4) = (2 + 4)^2 + 10 = 46. \quad \clubsuit$$

### 4.7.2 Metod Lagrangeovih multiplikatora

Metod suspstitucije nije uvijek moguće uspješno primijeniti. Takve situacije se javljaju kada se iz ograničenja (4.12) ne može jednoznačno jedna varijabla predstaviti kao eksplicitna funkcija druge varijable ili kad imamo vezani ekstrem za funkcije više od dvije varijable. Zbog toga se mora pribjeći rješavanju problema vezanog ekstrema na neki drugi način. Vrlo efikasan metod u tom slučaju je *metod Lagrangeovih multiplikatora* (ili jednostavno *Lagrangeov*[3] *metod*). Taj je metod univerzalan i može se koristiti i u situacijama kada je moguće primijeniti i metod supstitucije. Istaknimo da je uloga Lagrangeovog multiplikatora s vrijednostima u stacionarnoj tački bitna u ekonomiji, jer se može posebno istaknuti tada njegov ekonomski smisao.

Dakle, promatrajmo ponovo funkciju $f(x,y)$ koju treba optimizirati (maksimizirati ili minimizirati) uz dodatni uvjet (4.12), tj.

$$g(x,y) = 0.$$

Prema definiciji totalnog diferencijala prvog reda funkcije dvije varijable, imamo

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \\ 0 &= dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy. \end{aligned}$$

Množenjem druge jednadžbe nekim (za sada neodređenim) realnim brojem $\lambda$, a zatim sabiranjem obiju jednadžbi, dobijamo

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right)dy. \tag{4.14}$$

Da bismo odredili broj $\lambda$, zahtijevajmo da je u tački u kojoj se dostiže vezani ekstrem

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{4.15}$$

Ako je $M(x_0,y_0)$ tačka u kojoj se dostiže taj vezani ekstrem funkcije $f(x,y)$ uz ograničenje (4.12), tada prema teoremu o potrebnim uvjetima egzistencije lokalnog ekstrema vrijedi

$$\frac{df}{dx}(x_0,y_0) = 0,$$

odnosno $df(x_0,y_0) = 0$. Zbog toga i zbog (4.15), iz (4.14) slijedi da u tački $M(x_0,y_0)$ vrijedi jednakost

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0. \tag{4.16}$$

[3] Joseph-Louis Lagrange, francuski matematičar, 1736-1813.

# Poglavlje 5

# Integralni račun

## 5.1 Neodređeni integral

### 5.1.1 Pojam neodređenog integrala

U Poglavlju 3 imali smo priliku vidjeti da se, recimo, granični troškovi određuju kao izvod funkcije ukupnih troškova, te smo na taj način mogli doći do informacije o brzini promjene ukupnih troškova. Općenito, kad nam je poznata neka ekonomska funkcija $y(x)$ odgovarajuću graničnu funkciju $Gy(x)$ određujemo kao izvod funkcije $y(x)$ (vidjeti (3.16)). No, ponekad je u praksi važno, polazeći od graničnih troškova, doći do informacije o kretanju ukupnih troškova za određene nivoe proizvodnje. Slično tome, ekonomisti, kada im je poznata brzina inflacije, obično žele procijeniti buduće cijene. U općem slučaju, ponekad želimo kad nam je poznata neka granična funkcija $Gy(x)$ da odredimo odgovarajuću ekonomsku funkciju $y(x)$. Drugim riječima, kad nam je poznat izvod neke funkcije kako odrediti samu funkciju? Treba, dakle, naći neku obrnutu operaciju od izvoda funkcije. U tu svrhu uvedimo prvo pojam *primitivne funkcije.*

**Definicija 5.1** *Pretpostavimo da su funkcije $f$ i $F$ definirane na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$ i da je na tom intervalu funkcija $F$ diferencijabilna. Za funkciju $F$ kažemo da je* ***primitivna funkcija*** *funkcije $f$ ako za sve $x \in I$ vrijedi*

$$F'(x) = f(x).$$

Tako je funkcija $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10x - 25$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^2 + 10$ na intervalu $I = \mathbb{R}$, jer je

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 10x - 25\right)' = x^2 + 10 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Također, funkcija $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je primitivna funkcija funkcije

$$f(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

na intervalu $I = (-1, 1)$. Naime, za sve $x \in (-1, 1)$ vrijedi

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) \\ &= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = f(x). \end{aligned}$$

Primijetimo da primitivna funkcija date funkcije $f$ nije jedinstvena. Naime, funkcija $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10x + 20$ je također primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^2 + 10$ na intervalu $I = \mathbb{R}$, budući da je

$$G'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 10x + 20\right)' = x^2 + 10 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Također je i funkcija $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 6$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $I = (-1, 1)$, jer je

$$G'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 6\right)' = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)}} = f(x)$$

za sve $x \in (-1, 1)$. Uočimo da je u prvom slučaju $G(x) = F(x) + 45$, a u drugom $G(x) = F(x) + 6$. U oba slučaja smo dodali neku konstantu na funkciju $F(x)$. Općenito, ako je $C$ neka proizvoljna konstanta, tada je

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x).$$

Dakle, vrijedi opći zaključak: *Ako je funkcija $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, tada je i funkcija $G(x) = F(x) + C$, gdje je $C$ proizvoljna konstanta, također primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, što znači da primitivnih funkcija date funkcije ima beskonačno mnogo.*

S druge strane, ako su $F(x)$ i $G(x)$ dvije različite primitivne funkcije funkcije $f(x)$ na nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, tada je

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x) \quad (x \in I),$$

c) Jednostavnom transformacijom brojnika podintegralne funkcije dati se integral svodi na zbir dva tablična integrala:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int 1dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = x - \operatorname{arctg} x + C. \quad \clubsuit\end{aligned}$$

## Primjer primjene u ekonomiji

Primjena neodređenog integrala u ekonomiji je najčešća u slučaju određivanja nepoznate ekonomske funkcije kada je poznata njena granična funkcija, kao i u nekim slučajevima pri određivanju funkcije čiji je koeficijent elastičnosti poznat. Ovaj drugi slučaj (s koeficijentom elastičnosti) predstavit ćemo u okviru primjene diferencijalnih jednadžbi (u narednom poglavlju).
Kako je neodređeni integral obrnuta operacija od izvoda, onda na osnovu (3.16), u općem slučaju vrijedi

$$\boxed{ekonomska\ funkcija = \int (granična\ funkcija)\,.} \tag{5.2}$$

Specijalno je:

$$T(Q) = \int T'(Q)\,dQ = \int GT(Q)\,dQ, \quad T(p) = \int GT(p)\,dp,$$

$$P(Q) = \int P'(Q)\,dQ = \int GP(Q)\,dQ, \quad P(p) = \int GP(p)\,dp,$$

$$D(Q) = \int D'(Q)\,dQ = \int GD(Q)\,dQ, \quad D(p) = \int GD(p)\,dp.$$

**Primjer 5.3** ***(Ukupni troškovi)*** *Proizvođač nekog artikla je ustanovio da su granični troškovi proizvodnje $GT(Q) = 3Q^2 - 60Q + 500$ dolara po jedinici artikla kada se proizvede $Q$ jedinica artikla. Ukupni troškovi proizvodnje prve dvije jedinice artikla iznose* 950\$*. Koliki su ukupni troškovi proizvodnje prvih* 5 *jedinica artikla?*

*Rješenje.* Znamo da je funkcija graničnih troškova ustvari izvod funkcije ukupnih troškova, tj.

$$T'(Q) = 3Q^2 - 60Q + 500,$$

*Rješenje.* Prema opisanom postupku, budući da imamo samo jednu mogućnost izbora za $u$ i $dv$, dati integral izračunavamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\int \ln x dx &= \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| \\
&= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx \\
&= x \ln x - x + C. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

U slučaju trećeg i četvrtog ntegrala iz (5.4) postupamo kao i u slučaju prvog integrala iz te skupine.

**Primjer 5.10** *Izračunati integral* $\int x \sin x dx$.

*Rješenje.* Postupajući kao u slučaju integrala u Primjeru 5.8, imamo

$$\begin{aligned}
\int x \sin x dx &= \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| \\
&= -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x dx \\
&= -x \cos x + \sin x + C. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

### Primjeri primjene u ekonomiji

**Primjer 5.11** ***(Ukupna dobit)*** *Zadana je funkcija graničnih troškova i funkcija potražnje:*

$$GT(Q) = (2Q+1) \, e^{Q} - \frac{1}{Q^2} \quad i \quad Q\,(p) = \frac{1-p}{4},$$

*gdje je* $p$ *cijena, a* $Q$ *količina proizvodnje. Ako su ukupni troškovi po jedinici proizvodnje* 3, *izvesti funkciju dobiti.*

*Rješenje.* Funkcija ukupne dobiti je $D\,(Q) = P\,(Q) - T\,(Q)$, tj. tazlika ukupnih prihoda i ukupnih troškova. Odredimo prvo funkciju ukupnih troškova. Kako je

$GT(Q) = T'(Q)$, imamo (primjenom metoda parcijalne integracije)

$$\begin{aligned}
T(Q) &= \int T'(Q)\,dQ = \int \left[ (2Q+1)e^Q - \frac{1}{Q^2} \right] dQ \\
&= \int (2Q+1)e^Q dQ - \int Q^{-2} dQ = \int (2Q+1)e^Q dQ - \frac{Q^{-1}}{-1} \\
&= \int (2Q+1)e^Q dQ + \frac{1}{Q} \overset{(5.3)}{=} \left| \begin{array}{c} u = 2Q+1 \Rightarrow du = 2dQ \\ dv = e^Q dQ \Rightarrow v = e^Q \end{array} \right| \\
&= (2Q+1)e^Q - 2\int e^Q dQ + \frac{1}{Q} \\
&= (2Q+1)e^Q - 2e^Q + \frac{1}{Q} + C.
\end{aligned}$$

Iz početnog uvjeta $T(1) = 3$ slijedi

$$3 = (2 \cdot 1 + 1)e^1 - 2e^1 + \frac{1}{1} + C,$$

odakle je $C = 2 - e$, pa je funkcija ukupnih troškova

$$T(Q) = (2Q+1)e^Q - 2e^Q + \frac{1}{Q} + 2 - e.$$

Iz funkcije potražnje dobije se da je

$$p = p(Q) = 1 - 4Q,$$

te je funkcija ukupnih prihoda

$$P(Q) = Qp(Q) = Q(1-4Q) = Q - 4Q^2.$$

Konačno je funkcija ukupne dobiti

$$\begin{aligned}
D(Q) &= P(Q) - T(Q) = Q - 4Q^2 - \left[ (2Q+1)e^Q - 2e^Q + \frac{1}{Q} + 2 - e \right] \\
&= Q - 4Q^2 - (2Q+1)e^Q + 2e^Q - \frac{1}{Q} - 2 + e. \quad \clubsuit
\end{aligned}$$

**Primjer 5.12** ***(Radna efikasnost)*** *Nakon $t$ sati rada radnik u nekoj tvornici ima brzinu promjene produktivnosti $100te^{-0.5t}$ jedinica nekog artikla po satu. Koliko jedinica artikla može taj radnik proizvesti u prva 4 sata ako u prva 2 sata rada proizvede $50e^{-1}$ jedinica artikla?*

# Poglavlje 6

# Diferencijalne jednadžbe

## 6.1 Osnovni pojmovi

Očigledno za funkciju $y = e^{x^2}$ vrijedi da je njen izvod $y' = 2xe^{x^2}$, zbog čega je

$$y' - 2xy = 0. \tag{6.1}$$

Jednakost (6.1) vrijedi za sve $x \in (-\infty, +\infty)$ i ona predstavlja jednu relaciju oblika $F(x, y, y') = 0$, tj. relaciju između neovisne varijable $x$, funkcije $y$ i njenog izvoda $y'$. Naravno, možemo razmatrati i obrnuti problem, tj. odrediti one funkcije $y = y(x)$ koje, zajedno sa svojim izvodom, zadovoljavaju relaciju (6.1) za sve vrijednosti neovisne varijable $x$ iz određenog (datog) intervala. Samim tim relaciju (6.1) smatramo jednadžbom, koju ćemo zvati *diferencijalnom jednadžbom*, s nepoznatom funkcijom $y$ koju treba odrediti. No, u jednadžbi takvog tipa mogu se pojaviti i izvodi (ili diferencijali) višeg reda. Zbog toga ćemo navesti opću definiciju diferencijalne jednadžbe.

**Definicija 6.1** *Jednadžba oblika*

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{6.2}$$

*gdje je $F$ realna funkcija sa $n+2$ varijable (tj. $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$) i gdje je $y$ nepoznata funkcija koja se traži, naziva se* ***običnom diferencijalnom jednadžbom $n$-tog reda****.*

Termin "obična" je zbog činjenice da postoje i tzv. parcijalne diferencijalne jednadžbe, odnosno jednadžbe s nepoznatom funkcijom više od jedne varijable i s njenim parcijalnim izvodima. Ovdje će biti razmatrane samo obične diferencijalne jednadžbe i ubuduće ćemo riječ "obična" izostavljati.

Također, uočimo da je red diferencijalne jednadžbe jednak redu najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji figurira u jednadžbi. Tako je

$$y''' - 2xy'' + (\sin x + 1)\, y = \cos x$$

diferencijalna jednadžba trećeg reda, dok je

$$\left(x^2 - 1\right) y'' - 2xy = xe^x$$

diferencijalna jednadžba drugog reda.

**Definicija 6.2** *Svaka funkcija $y = y(x)$ koja zadovoljava jednadžbu (6.2), tj. da je*

$$F\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

*naziva se **rješenjem** ili **integralom** te diferencijalne jednadžbe.*

Vrlo često se pri rješavanju neke diferencijalne jednadžbe ne dobije eksplicitni oblik nepoznate funkcije, nego implicitni, npr. $G(x, y) = 0$. Obično se i takvo rješenje naziva *integralom* ili *integralnom krivom diferencijalne jednadžbe.*

Budući da u diferencijalnoj jednadžbi $n$-tog reda treba izvršiti $n$ puta integriranje, dobijeno rješenje će ovisiti ne samo o neovisnoj verijabli, nego i o $n$ konstanti, $C_1, ..., C_n$, tj. bit će funkcija oblika $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$. Takvo ćemo rješenje zvati *općim rješenjem* diferencijalne jednadžbe. Dodijelimo li svim tim konstantama određene vrijednosti, dobit ćemo jedno posebno rješenje diferencijalne jednadžbe, koje nazivamo *partikularnim rješenjem* ili *partikularnim integralom* te jednadžbe. Ako iz dobijenog općeg rješenja želimo odrediti partikularno rješenje, neophodno je jednadžbi pridodati uvjete:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)},$$

pri čemu brojeve $y_0, y_0', ..., y_0^{(n)}$ nazivamo *početnim uvjetima.*
U slučaju diferencijalne jednadžbe prvog reda opće rješenje je oblika $y = \varphi(x, C)$, što predstavlja jednoparametarsku familiju funkcija (krivih), dok za $C = a$ se dobije jedna funkcija (partikularni integral), odnosno jedna kriva (partikularna kriva) iz te familije.

Ovdje će biti predstavljena samo tri tipa diferencijalne jednadžbe prvog reda: diferencijalna jednadžba u kojoj je moguće izvršiti razdvajanje varijabli, linearna diferencijalna jednadžba i Bernoullijeva diferencijalna jednadžba.

### 6.1.1 Metod razdvajanja varijabli

Ovaj metod podrazumijeva da se u datoj diferencijalnoj jednadžbi, ako je to uopće moguće izvesti, varijable $x$ i $y$ i njihovi diferencijali odvoje i to tako, što je najlakše, da jedna varijabla i njen diferencijal egzistiraju (recimo) samo na lijevoj strani znaka jednakosti, a druga varijabla i njen diferencijal samo na desnoj strani.

Pretpostavimo da datu diferencijalnu jednadžbu prvog reda možemo svesti na oblik

$$F(x)\,G(y)\,dx + H(x)\,K(y)\,dy = 0. \tag{6.3}$$

Odavde je (prvo napravimo razdvajanje diferencijala $dx$ i $dy$)

$$F(x)\,G(y)\,dx = -H(x)\,K(y)\,dy,$$

a nakon dijeljenja s $H(x)$ i $G(y)$ (uz uvjete $H(x) \neq 0$ i $G(y) \neq 0$) imamo

$$\frac{F(x)}{H(x)}dx = -\frac{K(y)}{G(y)}dy.$$

Sada smo izvršili potpuno razdvajanje varijabli i možemo pristupiti integriranju obje strane ove jednakosti, nakon čega dobijamo opći integral date jednadžbe:

$$\int \frac{F(x)}{H(x)}dx = -\int \frac{K(y)}{G(y)}dy + C,$$

odnosno, ako je $f(x) = \displaystyle\int \frac{F(x)}{H(x)}dx$ i $g(x) = \displaystyle\int \frac{K(y)}{G(y)}dy$,

$$f(x) + g(y) = C.$$

**Primjer 6.1** *Data je diferencijalna jednadžba*

$$(x-2)\,y dx - 3x^2\,(y+2)\,dy = 0.$$

*a) Odrediti opće rješenje ove jednadžbe.*
*b) Naći ono rješenje date jednadžbe za koje je $y(1) = 1$.*

*Rješenje.* a) Data jednadžba je oblika (6.3), pa se može izvršiti razdvajanje varijabli. Naime, imamo

$$(x-2)\,y dx = 3x^2\,(y+2)\,dy,$$

odnosno

$$\frac{x-2}{x^2}dx = 3\frac{y+2}{y}dy \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

to je

$$\begin{aligned} z &= e^{\ln x^2}\left(\int \frac{x}{2}e^{-\ln x^2}dx + C\right) = x^2\left(\int \frac{x}{2}\cdot x^{-2}dx + C\right) \\ &= x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right). \end{aligned}$$

Sada je, zbog $y = z^2$,

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$$

opće rješenje date jednadžbe. ♣

## 6.2 Primjena diferencijalnih jednadžbi u ekonomiji

Pokažimo prvo kako se metod razdvajanja varijabli u diferencijalnoj jednadžbi prvog reda može primijeniti u ekonomiji. Ranije smo vidjeli da je mjera sposobnosti ekonomske veličine $y$ da reagira na promjenu druge ekonomske veličine $x$ iskazana koeficijentom elastičnosti $E_{y,x}$. No, često nam je potrebno riješiti obrnut problem, tj. kad je poznat koeficijent elastičnosti $E_{y,x}(x) = f(x)$ neke funkcije $y = y(x)$, treba odrediti tu funkciju. Koristeći Marshallovu formulu (3.20), tj.

$$E_{y,x} = \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

imamo

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = f(x),$$

što je diferencijalna jednadžba prvog reda u kojoj je moguće razdvojiti varijable na sljedeći način

$$\frac{dy}{y} = \frac{f(x)}{x}dx.$$

Primjenom integrala na obje strane posljednje jednakosti, dobijemo

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{f(x)}{x}dx,$$

odakle je

$$\ln|y| = \int \frac{f(x)}{x}dx + \ln|C|.$$

Odavde je

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \int \frac{f(x)}{x}dx,$$

# Poglavlje 7

# Diskretni dinamički modeli

Kako smo napomenuli u prethodnom poglavlju, diskretni dinamički modeli opisuju pojave ili procese preko diskretne neovisne varijable, recimo vremenske varijable $t$, koja prolazi nekim podskupom cijelih brojeva. Ove su situacije mnogo češće u stvarnosti, jer nas obično zanima stanje neke veličine u određenim vremenskim intervalima (danima, sedmicama, mjesecima, kvartalima, godinama i sl.). Ako je, dakle, neovisna diskretna varijabla vrijeme $t$, onda se odgovarajuća funkcija koja ovisi o $t$, označava sa $x(t)$ ili $x_t$, mada je najviše u upotrebi oznaka $x_n$, gdje $n$ označava redni broj vremenskog intervala. Na taj način diskretni dinamički model biva predstavljen nekom relacijom (jednadžbom) u kojoj se kao nepoznanica javlja niz $x_n$. Te jednadžbe se nazivaju *diferentnim jednadžbama*. Zbog toga je prvo neophodno upoznati se s osnovnim pojmovima vezanim za diferentne jednadžbe, a nakon toga preći na proučavanje njihove primjene u ekonomiji.

## 7.1 Diferentne jednadžbe prvog reda

**Definicija 7.1** *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, ... \tag{7.1}$$

*gdje je $f : I \to I$ ($I$ interval realnih brojeva), se naziva **diferentnom jednadžbom prvog reda**.*

Zašto se jednadžba (7.1) naziva baš diferentnom jednadžbom? Otkuda je dobila taj naziv? Naime, diferentne jednadžbe su intenzivno proučavane kao diskretni analogoni diferencijalnih jednadžbi

$$x' = g(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Ukoliko izvod $x'(t)$ aproksimiramo količnikom

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h},$$

za dovoljno malo $h$, i stavimo

$$t_n = t_0 + nh, \quad x(t_n) = x_n, \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n,$$

dobijamo

$$\Delta x_n = hg(x_n).$$

Dakle, aproksimacijom izvoda diferencijalnih jednadžbi, a što je moguće učiniti na više načina, dolazimo do novih oblika jednadžbi koje zapravo nazivamo diferentnim jednadžbama.

*Rješenje* jednadžbe (7.1) je svaki niz $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji zadovoljava jednadžbu (7.1) za sve $n = 0, 1, \ldots$ . Za neke klase diferentnih jednadžbi, prije svega za neke linearne, moguće je doći do općeg rješenja. Međutim, u općenitom slučaju to je vrlo teško postići. Teorija diferentnih jednadžbi je u ovom trenutku na početku svog razvitka, tako da je jako malo klasa diferentnih jednadžbi, čak i prvog reda, koje se mogu efikasno riješiti. Zbog toga ćemo se u ovom poglavlju posvetiti problemu rješavanja linearnih diferentnih jednadžbi, te njihovoj primjeni u praksi. Također, biće riječi o dinamici pojedinih diferentnih jednadžbi. Dinamika diferentne jednadžbe vrlo često je vrlo komplicirana. Tako je, za razliku od diferencijalnih jednadžbi, moguće haotično ponašanje rješenja čak i u slučaju diferentnih jednadžbi prvog reda (npr. slučaj Riccatijeve ili logističke diferentne jednadžbe). Kod diferencijalnih jednadžbi to je moguće tek u slučaju kad su one trećeg reda. Jednostavnosti radi, mi ćemo se baviti proučavanjem samo nekih najjednostavnijih oblika linearnih diferentnih jednadžbi.

### 7.1.1 Linearne jednadžbe prvog reda

**Definicija 7.2** *Jednadžba oblika*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.2}$$

*gdje su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ poznati nizovi realnih brojeva, naziva se* ***linearnom diferentnom jednadžbom prvog reda****.*

*U slučaju kada je $b_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, jednadžba (7.2) se naziva* ***homogenom****, dok se inače, to jest kada je $b_n \neq 0$ za bar jedno $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, jednadžba (7.2) naziva* ***nehomogenom****.*

Uočimo da se u jednadžbi (7.2) može općenito smatrati da indeks $n$ polazi od nekog fiksnog prirodnog broja $n_0 \geq 1$ . Međutim, smjenom $z_{n-n_0} = x_n$, taj slučaj svodimo na slučaj jednadžbe (7.2).

Obično se jednadžbi (7.2) dodaje takozvani uvjet početnih vrijednosti

$$x_0 = \alpha. \tag{7.3}$$

Diferentna jednadžba (7.2), zajedno s početnim uvjetom (7.3), čini tzv. *problem početnih vrijednosti* (skr. PPV).

Moguće su izvjesne modifikacije jednadžbe (7.2) u ovisnosti o tome da li su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konstantni ili ne:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.4}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.5}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.6}$$

pri čemu su $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ poznate konstante.

### Rješavanje homogene jednadžbe

Razmotrimo prvo slučaj homogene linearne jednadžbe prvog reda:

$$x_{n+1} = a_n x_n, \quad n = 0, 1, 2, ... \; . \tag{7.7}$$

Rješenje ove jednadžbe se može jednostavno dobiti iteriranjem:

$$\begin{aligned} x_n &= a_{n-1}x_{n-1} = a_{n-1}(a_{n-2}x_{n-2}) = a_{n-1}a_{n-2}(a_{n-3}x_{n-3}) = ... = \\ &= a_{n-1}a_{n-2}...a_0 x_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) x_0. \end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (7.7) je dato sa

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) C, \tag{7.8}$$

gdje je $C$ proizvoljna konstanta, dok odgovarajuće rješenje PPV ima oblik

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) \alpha. \tag{7.9}$$

Specijalno, ako je $a_i = a$ za sve $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, tada to rješenje ima oblik

$$x_n = a^n x_0. \tag{7.10}$$

**Primjer 7.1** *Jednadžba*

$$x_{n+1} = 3x_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

*ima opće rješenje*

$$x_n = C \cdot 3^n,$$

*gdje je C proizvoljna konstanta. Odgovarajuće rješenje PPV je*

$$x_n = \alpha \cdot 3^n.$$

*Primjećujemo da je svako rješenje neograničeno.* ♣

**Primjer 7.2** *Jednadžba*

$$x_{n+1} - \frac{3n+1}{3n+7} x_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

*ima opće rješenje (prema (7.8))*

$$\begin{aligned} x_n &= C \prod_{i=0}^{n-1} \frac{3i+1}{3i+7} \\ &= C \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{10}{16} \cdot ... \cdot \frac{3n-8}{3n-2} \cdot \frac{3n-5}{3n+1} \cdot \frac{3n-2}{3n+4} \\ &= \frac{4C}{(3n+1)(3n+4)}, \end{aligned}$$

*(C - proizvoljna konstanta), iz čega se da zaključiti da $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$.* ♣

## Nehomogena linearna jednadžba

Razmatrajmo sada slučaj nehomogene linearne diferentne jednadžbe prvog reda u najopćenitijem obliku (7.2). Jedinstveno rješenje ove jednadžbe može se naći također jednostavnim iteriranjem i primjenom matematičke indukcije. Naime,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 x_0 + b_0, \\ x_2 &= a_1 x_1 + b_1 = a_1 (a_0 x_0 + b_0) + b_1 = a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1, \\ x_3 &= a_2 x_2 + b_2 = a_2 (a_1 a_0 x_0 + a_1 b_0 + b_1) + b_2 = \\ &= a_2 a_1 a_0 x_0 + a_2 a_1 b_0 + a_2 b_1 + b_2, \end{aligned}$$

### 7.1.2 Primjene diferentnih jednadžbi prvog reda u ekonomiji

Razmatraćemo neke slučajeve iz prakse koji se mogu matematički modelirati, pri čemu su ti modeli linearne diferentne jednadžbe prvog reda.

Primjena diferentnih jednadžbi u ekonomiji je vrlo rasprostranjena, jer se mnogi ekonomski procesi mogu modelirati u obliku diferentnih jednadžbi. Svakako je najčešći slučaj obračuna kamate i amortizacije, ali i neki drugi vrlo važni, kao što su: rast nacionalnog dohotka, model paukove mreže (cobweb model) i tome slično.

#### Obračun kamate

Ovdje ćemo razmotriti nekoliko slučajeva obračuna kamate na uložena sredstva, pri čemu se podrazumijeva da se kamata obračunava na zatečeni iznos na kraju obračunskog perioda, a da se eventualna ulaganja izvode isključivo ili na početku ili na kraju obračunskog perioda.

**Slučaj 1** *Pretpostavimo da se na početku jednog obračunskog perioda u banku uložio iznos novca $I$. Postavlja se pitanje: koje će stanje novca biti na kraju $n$-tog obračunskog perioda ako se na kraju svakog obračunskog perioda zaračunava kamata po stopi $r$ (u decimalnom obliku kao $r = \frac{p}{100}$, gdje je $p\%$ kamatna stopa u procentima)?*

Označimo sa $I_n$ stanje računa na kraju $n$-tog perioda (tako da je $I_0 = I$). Na kraju $(n+1)$-vog perioda ovo stanje će biti uvećano za obračunatu kamatu na taj iznos, tj. za iznos $rI_n$. Dakle, vrijedi

$$I_{n+1} = I_n + rI_n,$$

odnosno

$$I_{n+1} = (1+r)\,I_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{7.18}$$

Očito je (7.18) homogena diferentna jednadžba prvog reda oblika (7.7), čije je rješenje dato sa (7.10), pri čemu je $a = 1 + r$, odnosno

$$I_n = (1+r)^n\, I_0 = (1+r)^n\, I, \tag{7.19}$$

a to i predstavlja traženo stanje računa na kraju $n$-tog obračunskog perioda.

**Primjer 7.5** *Odrediti broj godina potrebnih da se određena suma novca uložena u banku udvostruči, ako se na nju primjenjuje ukamaćivanje na kraju svake godine na zatečeni iznos novca s kamatnom stopom od $2\%$ godišnje.*

*Rješenje.* Označimo li sa $I_n$ iznos novca na kraju $n$-te godine, vidimo da je on rješenje diferentne jednadžbe

$$I_{n+1} = (1 + r)\, I_n,$$

gdje je $r = 0,02$ kamatna stopa. Prema (7.19) imamo

$$I_n = (1 + r)^n\, I_0,$$

gdje je $I_0$ iznos uložene sume novca. Prema uvjetima zadatka imamo $I_n = 2I_0$, pa vrijedi

$$2I_0 = (1 + r)^n\, I_0 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log (1 + r)} = \frac{\log 2}{\log \left(1 + \frac{2}{100}\right)} = 35.0027.$$

Dakle, za 35 godina će se suma novca, uz navedene uvjete, udvostručiti. ♣

**Slučaj 2** *Pretpostavimo da se konstantna suma novca $R$ deponuje na kraju svakog obračunskog perioda u nekoj banci, pri čemu se na zatečeni iznos primjenjuje obračun kamate na kraju svakog obračunskog perioda sa stopom $r$. Ponovo nas zanima isto pitanje: koje je stanje računa na kraju $n$-tog obračunskog perioda?*

Očito je da je stanje računa na kraju $(n + 1)$-og obračunskog perioda jednak zbiru iznosa novca stanja računa na kraju $n$-tog perioda, kamate obračunate na taj iznos po stopi $r$ i novca u iznosu $R$ koji se uplaćuje za svaki obračunski period, tj.

$$I_{n+1} = (1 + r)\, I_n + R, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{7.20}$$

gdje je $I_0 = 0$. Rješenje ove diferentne jednadžbe je

$$I_n = R\frac{(1 + r)^n - 1}{r}. \tag{7.21}$$

**Slučaj 3** *Razmotrimo sada situaciju sličnu prethodnom slučaju, samo što ćemo pretpostaviti da se konstantna suma novca $R$ deponuje na početku svakog obračunskog perioda.*

Naime, i ovdje se dobije ista diferentna jednadžba, tj. (7.20), s tim da ovdje početni ulog $I_0$ nije 0, nego je $I_0 = R$. Prema formuli (7.14), za $I_0 = R, a = 1 + r, b = R$, imamo

$$\begin{aligned} I_n &= \left(I_0 - \frac{R}{1 - (1 + r)}\right)(1 + r)^n + \frac{R}{1 - (1 + r)} \\ &= \left(R + \frac{R}{r}\right)(1 + r)^n - \frac{R}{r}, \end{aligned}$$

odnosno
$$I_n = R\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r}. \tag{7.22}$$

**Slučaj 4** *Pretpostavimo da je na početku prvog obračunskog perioda deponovano novca u iznosu $I$ u nekoj banci i pretpostavimo da se konstantna suma novca $R$ deponuje na kraju svakog obračunskog perioda. Ako se na zatečeni iznos primjenjuje obračun kamate na kraju svakog obračunskog perioda sa stopom $r$, koje će stanje računa biti na kraju $n$-tog obračunskog perioda?.*

Kao i u prethodna dva slučaja imamo istu diferentnu jednadžbu (7.20), pri čemu je $I_0 = I$. Prema formuli (7.14), za $I_0 = I, a = 1+r, b = R$, imamo
$$I_n = \left(I_0 - \frac{R}{1-(1+r)}\right)(1+r)^n + \frac{R}{1-(1+r)},$$
odnosno
$$I_n = \left(I + \frac{R}{r}\right)(1+r)^n - \frac{R}{r}. \tag{7.23}$$

### Amortizacija

Amortizacija je proces kojim se otplaćuje određeni zajam putem niza periodičnih rata, pri čemu svaka od njih sadrži i dio otplate osnovnog duga (glavnice) i dio kamate koja se zaračunava na neotplaćeni dio duga za svaki vremenski period posebno. Pretpostavljamo, dakle, da je u pitanju obračun kamate na zatečeni iznos, koji se primjenjuje po stopi $r$ za svaki vremenski period otplate ukupnog duga. Sa $p_n$ označimo neotplaćeni dio duga nakon $n$-te uplate $g_n$ (dakle, uplate u općem slučaju ne moraju biti jednake).

Formulacija našeg modela ovdje je bazirana na činjenici da je neotplaćeni dio duga $p_{n+1}$, nakon $(n+1)$-ve rate otplate duga, jednak zbiru neotplaćenog dijela duga $p_n$ nakon $n$-te rate otplate duga i kamate $rp_n$ obračunate u toku $(n+1)$-og perioda, umanjenog za ratu $g_n$. Dakle,
$$p_{n+1} = p_n + rp_n - g_n = (1+r)\,p_n - g_n, \quad n = 0, 1, ...$$

Prema (7.15), imamo
$$p_n = (1+r)^n\,p_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(1+r)^{n-k-1}\,g_k.$$

U praksi, rata otplaćivanja duga $g_n$ je konstantna i, recimo, jednaka $G$. Zamjenom u posljednjoj jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} p_n &= (1+r)^n p_0 - (1+r)^n G \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k-1} \\ &= (1+r)^n p_0 - \left[(1+r)^n - 1\right] \left(\frac{G}{r}\right). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Ako želimo zajam otplatiti u tačno $n$ rata, postavlja se pitanje kolika će biti rata otplate duga? Naravno, tada je $p_n = 0$, pa zamjenom u (7.24), imamo

$$G = p_0 \left[\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right]. \tag{7.25}$$

**Primjer 7.6** *Napraviti amortizacioni plan po principu mjesečne otplate zajma od* 100$ *uz kamatnu stopu od* 5% *mjesečno. Amortizacioni plan treba da sadrži: mjesec (odnosno broj rate), neplaćeni dio glavnice početkom mjeseca, iznos rate otplate duga na kraju mjeseca (anuitet), strukturu anuiteta, koja podrazumijeva iznos kamate obračunate na neplaćeni dio duga na kraju obračunskog perioda (tj. mjeseca) i dio otplate glavnice. Plan praviti prema pretpostavci da će zajam biti otplaćen u pet rata.*

*Rješenje.* Izračunajmo prvo iznos mjesečne rate otplate duga (anuiteta). Uzimajući da je $p_0 = 100\$$ i $r = 5\% = \dfrac{5}{100}$, iz (7.25) dobijamo

$$G = 100 \frac{\frac{5}{100}}{1-\left(1+\frac{5}{100}\right)^{-5}} = 23,09748(\$) \approx 23,10(\$).$$

**Tabela 7.1** Amortizacioni plan

| Mjesec | Neplaćeni dio glavnice poč. mj. | Anuitet | Kamata od 5% (dio anuiteta) | Otplata glavnice (dio an.) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100,00$ | 23,10$ | 5,00$ | 18,10$ |
| 2 | 81,90 | 23,10 | 4,10 | 19,00 |
| 3 | 62,90 | 23,10 | 3,14 | 19,96 |
| 4 | 42,94 | 23,10 | 2,15 | 20,95 |
| 5 | 21,99 | 23,10 | 1,10 | 22,00 |
| 6 | 0,00 | | | |
| Ukupno: | | 115,50$ | 15,49$ | 100,01$ |

# Literatura

[1] R.A. Adams, *Calculus - a complet course,* Fifth Edition, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003.

[2] H. Bader, S. Frőhlich, *Matematika za ekonomiste,* Rad, Beograd, 1980.

[3] J. Bakalar, *Mikroekonomija,* Treće izdanje, HKD Napredak, Sarajevo, 2003.

[4] A.C. Chiang, *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Treće izdanje, MATE, Zagreb, 1994.

[5] S. Drpljanin, *Matematika,* Ekonomski fakultet Tuzla, Tuzla, 1997.

[6] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations,* Third Edition, Springer, New York, 2005.

[7] G. Gandolfo, *Economic Dynamics - Study Edition,* Springer-Verlag Berlin, Heildelberg, 1997.

[8] S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations (With Illustrative Examples from Economics, Psihology, and Sociology),* Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[9] L.D. Hoffmann, G.L. Bradley, *CALCULUS for Business, Economics, and the Social and Life Scinces,* Fifth Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1992.

[10] B. Ivanović, *Matematika za ekonomiste,* Naučna knjiga, Beograd, 1973.

[11] W. G. Kelley, A. C. Peterson, *Difference Equations - An introduction with applications,* Academic Press, 2001.

[12] M. R. S. Kulenović, G. Ladas, *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjectures,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2001.

[13] M. R. S. Kulenović, O. Merino, *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London, 2002.

[14] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene,* Tehnička knjiga - Zagreb, 1967.

[15] V. Lakshmikantham, D. Triggiante, *Theory of Difference Equations,* Academic Press, Boston et al., 1988.

[16] H. Levy, F. Lesman, *Finite Difference Equations,* Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[17] W.G. McCallum, D. Hughes-Hallet, A.M. Gleason et al., *Multivariable calculus,* Wiley, New York, 1998.

[18] R. E. Mickens, *Difference Equations, Theory and Applications,* Second Edition, VNR, New York, 1990.

[19] M. Nurkanović, *Diferentne jednadžbe - Teorija i primjene,* Denfas, Tuzla, 2008.

[20] M. Nurkanović, Z. Nurkanović, *Elementarna matematika - Teorija i zadaci,* PrintCom, Tuzla, 2009.

[21] L. Smajlović, *Matematika za ekonomiste,* Ekonomski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2010.

[22] B. Šego, *Matematika za ekonomiste,* Narodne novine d.d., Zagreb, 2005.

[23] K. Šorić, *Zbirka zadataka iz matematike s primjenom u ekonomiji,* Treće izdanje, Element, Zagreb, 2006.

[24] F. Vajzović, M. Malenica, *Diferencijalni račun funkcija više promjenljivih,* Univerzitetska knjiga, Sarajevo, 2002.

# Indeks pojmova